RAD

JUGOSLAVENSKE AKADEMIJE

ZNANOSTI I UMJETNOSTI.

KNJIGA 158.

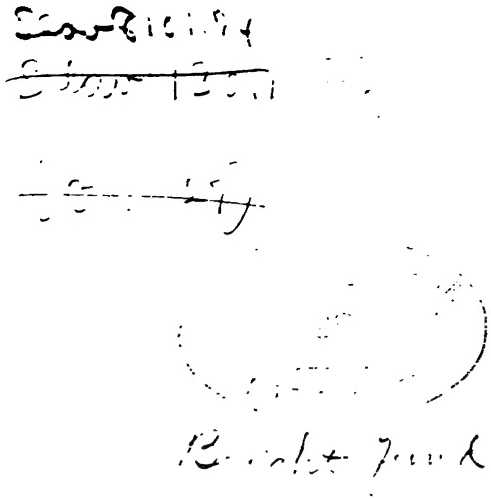
MATEMATIČKO-PRIRODOSLOVNI RAZRED.

35.

U ZAGREBU 1904.

KNJIŽARA JUGOSLAVENSKE AKADEMIJE (DIONIČKE TISKARE)
(GJURO TRPINAC.)

Digitized by Google



Dionička tiskara u Zagrebu.

Digitized by Google

Sadržaj.

	Strana
Rijeke u Hrvatskoj. I. dio. Areal poriječjâ. Od dra. Artura Gavazzija	1—41
Povijest razvoja inflorescencijâ kod Dipsakacejâ. (Sa 3 table.) Od dra. Stjepana Gjurašina	42—68
O jednoj cirkularnoj kubičnoj elipsi i njezinoj projekciji. Od dra. Jurja Majcena	69—91
O nekim aritmetičnim funkcijama. Od dra. Stjepana Bohničeka	92—170
Revizija hrvatske flore. (Revisio florae croaticae. [Nastavak])	171—221
Dvadeset i prvo potresno izvješće za god. 1903. Od dra. Miše Kišpatića	222—238
Dodatak raspravi „Ribe dubrovačke“ (u „Radu“ knj. 155.) Od B. Kosića	239—240

Digitized by Google

Digitized by Google

Rijeke u Hrvatskoj.

Primljeno u sjednici matematičko-prirodoslovnoga razreda Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti dne 1. veljače 1904.

Napisao dr. Artur Gavazzi.

Prvi dio.

Areal poriječjâ.

Malo su se geografi bavili do sada naukom o rijekama — ili kako je danas rado nazivlju: potamologijom — makar da je njezin objekt od prevelike znatnosti po kulturne prilike čovjeka. Nije desetak godina, što se u tome započela nova era[1]. S druge strane, budući da su rijeke u nekim krajevima štetno djelovale na kulture, našlo se tehničara, koji su zgodnim sredstvima znali ublažiti nevolje uzrokovane poplavama. Na taj se način razvila hidrotehnika do znatna savršenstva, a njoj zahvaljujemo, što su mnogi krajevi oteti neplodnosti.

Nije li hidrotehnika uspjela prema očekivanju, krivo je ponajviše to, što se premalo obzirala na prirodne prilike rijeka. Pa i u Hrvatskoj se na tom polju radilo do nedavna bez osnove: gdje je god koji potok ili rijeka poplavljivala, ondje su iskopavali kanale, da zališnu vodu odvedu drugamo, u koji drugi potok ili rijeku. Tijem se — istina — jedan potok rasteretio, ali se drugi preteretio, pa je onda on poplavljivao. Tada je trebalo ovaj posljednji rasteretiti, pa se od njega kanalom vodila voda u drugi potok, i tako dalje do dvaju glavnih naših žila kucavica: do Save i Drave. Budući da su i ove dvije rijeke od prirode nadarene plitkim koritom, a vrlo pol·žitim bregovima (obalama), prenesena je bila, poradi spomenutoga postupka, poplava na njih same. Padne li nešto veća množina kiše, eto poplave u Podravini i Posavini. Kako god bilo, hidrotehnika je svakako dalje koraknula od njene sestre, od

[1] Ule W.: Die Gewässerkunde im letzten Jahrzehnt. „Geographische Zeitschrift", god. VI. (1900.) str. 148—170. (III. „Die Flusskunde").

Digitized by Google

potamologije. Nije pak čudo, što se ova nauka u Hrvatskoj nije razvila, kad je u većim i kulturnijim državama jedva u najnovije doba počela da se ističe.

U tome je trebalo geografima podati neku vrstu programa, po kojem će obrađivati tu nauku, a učiniše to između ostalih ponajbolje Penck[1] i Ule[2].

Držeći se njihovih priznatih načela pokušat ću da podadem sliku o rijekama u Hrvatskoj i Slavoniji. No budući da taj objekt nije ograničen političkim granicama, već pripada i drugim zemljama, morao sam se donekle obzirati i na one dijelove, koji nijesu naši.

Hrvatska (sa Slavonijom) proteže se od 32° 4½′ (Rijeci na sjeveru) do 38° 7½′ (kod Zemuna) ist. Ferro, i od 44° 7′ (Kninu na sjevero-zapadu) do 46° 24½′ (kod Ormuža) sjev. geogr. širine. Po tome obuhvata 6° 3′ duljine i 2° 17½′ širine geogr., dok zračni pravac mjeri oko 484 *Km* dužine (Z—I) i 255 *Km* širine (S—J).

Prema svojem položaju Hrvatska se nalazi između Jadranskoga i Crnoga mora; po njoj se dakle provlači dio razvodnice pontsko-jadranske[3]. Da nijesu neobični oblici tla, koji su u zapadnoj Hrvatskoj razvijeni u punoj mjeri, mogli bismo tu razvodnicu promatrati kao neprekidnu krivku, koja razdvaja poriječje jadransko od pontskoga. Zapravo pak imademo u Hrvatskoj dvije razvodnice.

Velebit, ta velika barijera, koja se provlači uz našu jadransku obalu, tako je blizu moru, da se tekućice na njegovoj zapadnoj strani ne mogu da razviju: tek što izviru, utječu u more. Većim su dijelom to bujice, od kojih mnoge imadu karakter r j e č i n a, a najviše njih karakter s u š i k a[4].

Izvan poriječja ovih bujica prosule su se po cijelom Velebitu nebrojene vrtače ili ponikve. One nemaju poriječja, jer gutaju svu meteornu vodu, koja valja da prodire u unutarnjost zemlje, te se salijeva u vodu podzemnicu (Grundwasser). Bez obzira na političke

[1] Penck A.: Die Flusskunde als ein Zweig der physikalischen Geographie. „Zeitschrift für Gewässerkunde" vol. I. (1898.), str. 1—9.

[2] Ule W.: Die Aufgabe geographischer Forschung an Flüssen. „Abhandlungen" d. k. k. Geogr. Gesell. Bd. IV, No. 4., Wien 1902.

[3] Šenoa M.: Pontsko-jadranska razvodnica i jadransko područje u Hrvatskoj. S. O. iz „Rada" Jugosl. akad. knj. 143., Zagreb 1900.

[4] „Rječina" (tal. fiumera) u sušno doba nosi vrlo malo vode, a u vanrednim prilikama presuši. Kažu, da je jednom i susačka Rječina presušila. „Sušik" je tekućica, koja redovno svake godine u ljetno doba presuši, a u kišno doba nabuja i počini dosta štete.

Digitized by Google

međe povukao sam (na vojnoj specijalnoj karti) krivku, koja s jedne strane isključuje sve te ponikve, a s druge obuhvata sve bujice i rijeke jadranske. Ta se krivka počinje kod 32° ist. F. i 45° 22′ sj. šir., vuče se po jugozapadnom slazu Velebita, a sastaje se na Panosu s pontskom razvodnicom. Ne podajući dobivenim vrijednostima matematičke točnosti, proračunao sam, da se nalazi ta krivka, koja vrijedi kao izrazita

jadranska razvodnica,

na listu	*na temelju*	*u aps. visini,*	*a duga je*
Rijeka	57 kotâ	od 519 *m*	104 *Km*
Novi	18 „	628 „	22 „
Brinj	35 „	721 „	41 „
Senj	51 „	1001 „	59 „
Bag	39 „	1039 „	40 „
Pag	18 „	869 „	27 „
Medak	70 „	864 „	98 „ [1]
Benkovac . .	32 „	418 „	31 „
Knin	78 „	666 „	108 „
Gračac	11 „	1089 „	13 „
Ukupno	409 kotâ . .	popr. 761 *m* .	uk. 543 *Km*

Dakle unutar navedenih granica, a u duljini od 543 *Km* nalazi se jadranska razvodnica u apsolutnoj visini od 761 *m*, jer je dosta razvedena (zavojita).

Između jadranske i pontske razvodnice utislo se područje ponornicâ i krša. A baš između Velebita s jedne strane, a Kapele i Plješevice s druge razvile su se u velikim kotlinama (poljima) naše najveće ponornice: Lika i Gacka. Ove su kotline u velike potencirane ponikve, po kojima vidljivo teče voda, da se onda u ponore izgubi; dok ponikve nemaju nikakvih tekućica, jer se meteorna voda odmah izgubi u zemlji. Zapravo dakle ne znamo ni za ponornice ni za ponikve, kamo pripadaju: u jadransko ili pontsko područje. Istom kad bude utvrđeno jasnim dokazima, gdje pojedine ponornice izbijaju opet na vidjelo, moći ćemo ih pribrojiti ovomu ili onomu području. Ja sam ih s toga posebice proma-

[1] U sva tri broja na listu „Medak“ uračunao sam tri oveća kompleksa krša između Paklenicâ i Kozjače, makar da se nalaze unutar spomenute krivke. Kad bih te komplekse isključio i pribrojio jadranskomu području, onda bi (u zadnjem retku) broj svih kotâ iznosio 371, popr. visina razvodnice bila bi poprečno u aps. vis. od 765 *m*, a duljina bi iznosila 494 *Km*.

Digitized by Google

trao, a za svaku sam zabilježio vjerojatno područje, sudeći jedino po položaju ili smjeru njenu (P = pontsko, A = jadransko područje). Za ponikve pak ostat će nam područje zagonetno za dugo i dugo vremena; i njih sam pod imenom „Krš“ izlučio i posebice izmjerio.

Veći dio vode šalje Hrvatska kroz Dravu, Vuku, Budovar i Savu u Dunav, a po njemu u Crno more. Hidrometeore, za koje sigurno znademo, da hrane spomenute rijeke, padaju unutar granice, koju ćemo nazvati pontskom razvodnicom. Po primjeru jadranske izračunao sam i za nju ponajglavnije elemente. Počeo sam mjeriti od kapelice jugo-istočno od sela Kozjega vrha (kod Prezida), a završio na Panosu (1326 *m*), gdje se sastaje sa jadranskom razvodnicom. Naročito ističem, da nije to sva razvodnica, već samo jedan dio njezin, i to onaj, koji najviše pripada Hrvatskoj. Ona rastače tekućice, koje se nalaze između desne obale Kupe, lijeve obale Une i Save, od krša i ponornica. Pontska razvodnica neprekidna je krivka, ali se, kao i kod jadranske razvodnice, — samo u većoj mjeri — nalazi i izvan nje nekoliko ovećih kompleksa terena, po kojima su razasute ponikve i ponornice. Razvodnice pojedinih ovih osamljenih kompleksa („eksklavâ“) priračunao sam glavnoj razvodnici, ali sam ih i posebice (u zagradama) istaknuo. Prema tome se nalazi

pontska razvodnica

na listu	*na temelju*	*u aps. visini,*	*a duga je*
1. Čabar	14 kotâ	od 815 *m* . . .	17 *Km*
2. Kočevje . . .	13 „	367 „ . . .	20 „
3. Jaska	36 „	252 „ . . .	58 „
4. Rijeka . . .	28 „	872 „ . . .	32 „
5. Ogulin . . .	75 „	429 „ . . .	120 „
6. Karlovac . .	184 „ (55)	216 „ (192)	263 „ (58)
7. Brinj	2 „	260 „ . . .	2 „
8. Slunj	192 „ (71)	285 „ (277)	280 „ (101)
9. Žirovac . . .	34 „ (34)	418 „ (418)	44 „ (44)
10. Plitvice . . .	104 „ (5)	546 „ (391)	138 „ (5)
11. Bihać	77 „ (54)	404 „ (388)	120 „ (95)
12. D. Lapac . .	39 „	600 „ . . .	57 „
13. Gračac . . .	40 „	869 „ . . .	61 „
Cijela razvodnica:	838 kotâ	popr.: 402 *m* . .	1212 *Km*
Same eksklave:	(219)	(308 *m*) . .	(303 *Km*)
Razvodnica bez eksklava: . .	619 kotâ	508 *m* . . .	909 *Km*

Digitized by Google

Pontska se razvodnica u Hrvatskoj nalazi dakle poprečno u aps. visini od 402 *m*, a to je od prilike polovina aps. visine, u kojoj se nalazi jadranska razvodnica.

Daleko od pontske razvodnice, a baš u Srijemu nailazimo na oveći kompleks terena, koji po svom vanjskom obliku mnogo naliči na krš. To je „srijemska ploča“, koja se vuče podno južnoga ruba Fruške gore, a posuta je ponikvama. I nju sam izlučio, jer nema vidljiva i poznata odvirka, i posebice izmjerio njezin areal. Dakako da joj nijesam pribrojio one tekućice, koje kroz nju prolaze po razmjerno dubokim koritima, a slijevaju se u Dunav ili Savu.

Još ću jednu osobinu da spomenem. Kod Vinkovaca nalazi se potok „Rvenica“, koji spaja Vuku s Bosutom: cijeli je Srijem dakle nekakav otok. Da ne učinim krivo ni Vuki ni Bosutu, izmjerio sam sliv Rvenice za se[1].

Prema ovim načelima razdijelio sam svu Hrvatsku i Slavoniju na ova područja:

1. Jadransko područje, koliko ga obuhvata njegova razvodnica;

2. Ponornice, koje sam poradi lagljega prijegleda označio zvjezdicom;

3. Krš obuhvata sve ponikve nepoznata odvirka. Budući da na njemu nema tekućica, nijesam ga — kao rijeke — razlučio u brdovit i ravninski. Veći se dio naznačenoga areala nalazi u pobrđu; ravninskoga krša ima malo, a ponajviše po većim poljima: ličkom, gačkom, krbavskom i dr. Istaknut je razmaknutim slovima, a prema položaju razdijeljen je u četiri skupine: jedna je između Save i Drave (označena sa „Sava l.“), druga između Save i Kupe („Kupa l.“), treća između Kupe, Une i Zrmanje[2] („Kupa d.“, „Una l.“ ili „Zrmanja d.“), a četvrta na desnoj Uni („Una d.“) ili na lijevoj Zrmanji („Zrmanja l.“);

4. Sava, 5. Drava, 6. Dunav s njihovim pritokama;

7. Srijemska ploča nepoznata odvirka, i napokon

8. Rvenica, koja spaja poriječje Vuke s onim Bosuta ili Save.

Areali svih ovih objekata sačinjavaju površinu Hrvatske i Slavonije. Na svakom pojedinom listu naznačeno je, koliko otpada na

[1] Gosp. prof. dr. J. Modestin u Vinkovcima saopćuje mi, da Rvenica samo u kišno doba (t. j. kad nabuja) teče u Vuku i Bosut; inače samo u Bosut.

[2] Gledaj br. 69. (Zona 29, kol. 14; Knin).

Digitized by Google

HS. poradi kontrole. Nijesam nikamo pribrojio areal od 1·27 Km^2 (Zona 23, kol. 11; Čabar), jer je to još prijeporno zemljište između Hrvatske i Istre.

U školskim pa i u naučnim knjigama običaj je razdijeliti tijek rijeke na troje: onaj dio, koji je blizu izvora, zove se gornji tijek; onaj kod ušća: donji, a između njih je srednji tijek. Karakteriziraju pak gornji tijek time, što rijeka erodira; donji tijek time, što ona akumulira (taloži); dok tvrde, da su u srednjem tijeku izjednačene obje ove sile. Lijepo je to rečeno, ali u istinu nema rijeka, koje bi imale sva tri tijeka. Smijem pače ustvrditi, da su sve rijeke izuzetak toga pravila. Ima tekućica, kod kojih razbiramo samo gornji tijek, kod nekih pak samo donji tijek; vrlo mnogo rijeka ima oba tijeka — ali sva tri nijedna. A u mnogim se tekućicama ponavljaju karakteristike obadvaju tijekova. Što bismo onda rekli na pr. o Dunavu? U ugarskoj velikoj nizini Dunavu je donji tijek isto, kao i u vlaškom nizozemlju, a između Bazijaša i Severina isto je tako gornji tijek, kao u Schwarzwaldu. Po tome ima Dunav i jedan donji tijek, koji se nalazi više gornjega — a to je apsurdno.

U istim se prilikama nalazi naša Kupa, koja nalikuje na Dunav u rasporedu tih tijekova. Šenoa[1] veli, da gornji tijek Kupe dopire do Zdihova (165 *m* a. v.), srednji do Ozlja (116 *m*), a donji dalje do ušća (92 *m*). Ne mislim, da je dokazima utvrdio ovu razdiobu. Sudeći pak po njegovim riječima „Kupa si probija put među niskim humljem i ograncima Žumberačke gore", morao bih ustvrditi, da Kupa snažno erodira u srednjem tijeku. Taj bi dakle pripadao gornjemu tijeku. Nadalje držim, da gornje Pokuplje od Ozlja pak do Graca ili Središkoga ima iste osobine, kao i donje Pokuplje od Farkašića ili od Šišinca do ušća, t. j. Kupa razvija svoju silu taloženja. Tu bismo dakle imali njezin donji tijek — kao što i Šenoa veli. No među jedno i drugo Pokuplje utisla se uska dolina Kupe, koja ima karakter bar srednjega — ako ne gornjega tijeka. Dakle bi se između dva donja tijeka nalazio jedan srednji ili gornji tijek.

I Sutla pokazuje kao i Kupa iste osobine, a mogli bismo takvih primjera naći na stotine. A zapravo, kad razmislimo malo o karakteristici srednjega tijeka, nehotice nam se nameće pitanje: da li

[1] Šenoa M.: Rijeka Kupa i njezino porječje. „Rad" Jugosl. akademije, knj. 122., Zagreb 1895., str. 125—218. U ovoj su radnji pogrješni svi podaci o „padu" rijeka.

Digitized by Google

rijeka može imati srednji tijek? Erozivna sila, koja je kod izvora rijeke najjača, biva sve manja — u normalnim prilikama — prema ušću. Akumulativna snaga rijeke naprotiv od ušća biva manja prema izvoru. Ako predočimo obje sile kao krivke u okviru koordinata, vidjet ćemo, da se sastaju u jednoj točki, gdje bi obje morale biti jednake ništici. U ovoj točki one izmjenjuju svoje uloge: erozije prema ušću nestaje, a akumulacija prevlađuje, dok je prema izvoru obrnuto. Upravo ona t o č k a morala bi biti srednji tijek.

Sve nas to upravo sili, da napustimo spomenutu diobu u tri tijeka. Mjesto nje prihvatit ćemo prirodnu razdiobu, koju je postavio A. Haase[1] i koju možemo aplikovati na sve rijeke, a da pri tome ne bude ni izuzetaka ni apsurditeta.

Rijeka teče po bregovitom ili po ravnom tlu ili pak po jednom i drugom; prema tome rijeka ima bregovit ili ravninski ili oba tijeka. Bregovit je tijek ondje, gdje se pobrežje (Ufergebiet) tik do korita rijeke strmenito izdiže, dok je s druge strane u ravninskom tijeku pobrežje položito. Oba su ova elementa veoma jasno izražena na vojnoj specijalnoj karti, pa ih je lako raspoznati i razdvojiti.

Tako sam razdijelio tijek rijeka i pritoka u Hrvatskoj i Slavoniji[2], a pri tome sam za svaki od njih naznačio apsolutnu visinu, kod koje prestaje bregovit, a počinje se ravninski tijek.

Što se tiče mjerenja areala pojedinih poriječja, tek ću spomenuti, da sam ga izveo na vojnoj specijalnoj karti 1 : 75.000, a s polarnim planimetrom Amslerovim. No pri tome primjećujem, da sam uvijek uzeo obzir na kontrakciju papira, koja znatno djeluje na vrijednost čak jedne planimetarske jedinice.

S metodičke strane, koja je u Hrvatskoj slabo poznata, a s uspjehom je upotrebljavaju strani geografi, vrijedno je da kažem par riječi.

Iznajprije treba opredijeliti konstantu samoga planimetra, koja nam je potrebna, kad njime mjerimo površinu oko njegova pola. Makar koji list specijalne karte treba razdijeliti (olovkom) na če-

[1] Haase A.: Flüsse und Flussläufe. Petermann's Mitteilungen, 1891., str. 49—51.

[2] Ovu sam razdiobu proveo za naše rijeke još god. 1890. (prije Haasea) radeći u geografskom institutu c. kr. sveučilišta bečkoga. Vidi Pencka: Morphologie d. Erdoberfläche, I. Bd., str. 264.

Digitized by Google

tiri kvadrata, a svaki od njih posebice izmjeriti planimetrom nekoliko puta, da dobijemo sredik. Zbroj planimetarskih jedinica za sva ta četiri kvadrata bit će uvijek veći za neku veličinu (a to je ta konstanta) od broja planimetarskih jedinica, koje smo dobili mjereći sav isti list planimetrom na jedanput okolo naokolo t. j. oko pola. Za svaki pojedini list treba izračunati vrijednost jedne planimetarske jedinice u Km^2 na četiri decimale. Za pojedine pak objekte dosta je izračunati ploštinu na dvije decimale, makar da druga decimala nije posve pouzdana. Na specijalnoj karti pogrješka od jedne jedincate planimetarske jedinice ima za posljedicu pogrješku od najmanje $\pm 0{\cdot}05\ Km^2$; s toga je upravo nesmisao, kad se ploština makar kojega objekta opredijeli na četiri ili čak na šest decimala[1]. U drugu je ruku pretjerano, kad se ploština za omanje objekte saopćuje na Km^2 okruglo, a u isto doba za neke na četiri decimale. U ovu pogrješku pada prijegled „Poriečja u kraljevinama Hrvatskoj i Slavoniji", što ga je podao narodno-gospodarstveni odsjek naše kr. zem. vlade[2].

Držim, da je bila potreba saopćiti podatke o arealu naših rijeka izmjerenu prema zahtjevima nauke. Da pak kontrola bude što zgodnija i sigurnija, držao sam za nužno publicirati vrijednosti izmjerene na svakom pojedinom listu specijalne karte, koliko se tiču Hrvatske i Slavonije. Za svaku tekućicu naznačio sam, koje je rijeke pritoka, i poradi lagljega prijegleda i poradi nekoliko homonimija.

Moram spomenuti, da sam na svim rijekama mjerio upravo po matici, gdje je god po njoj povučena politička međa, a ne uz obalu. To sam učinio ne samo poradi same političke granice, već i poradi toga, što naše rijeke u ravnini u kratko vrijeme mijenjaju svoj tijek.

---

[1] Šenoa opredjeljuje poriječje Kupe i njenih pritoka na četiri decimale (Kupa i njezino porječje l. c. str. 211—212.), a primorčicâ na šest (Pontsko-jadranska razvodnica l. c. str. 65—66). U ostalom vidi važni članak E. Hammera: Die Genauigkeit der Flächenangaben in der Geographie. „Geographische Zeitschrift", Leipzig, VI. god. (1900.), str. 139—148.

[2] Nalazi se u djelu „Opažanja oborina i vodostaja u kraljevinama Hrvatskoj i Slavoniji" godine 1901. Zagreb 1902.

Digitized by Google

1. *Zona 20, kol. 13;* Bistrica:

	Pobrđe	*Ravnina*
Mala Krapina (Krapina) . .	3·67 *Km²* . .	—
Sutla (Sava)	0·48 „ . .	—
	4·15 „	

HS. = 4·15 Km²

2. *Zona 20, kol. 14;* Vinica:

Mala Krapina	5·73 *Km²* .	— *Km²*
Bednja (Drava)	140·85 „ . .	0·90 „
Plitvica „	38.26 „ . .	56·71 „
Drava ostala	29·86 „ . .	137·10 „
	214·70 „ . .	194·71 „

HS. = 409·41 Km²

Bilješke. Na ovom listu prema prirodnim granicama (po matici Drave) pripada HS = 544·88 *Km²*. — Ravnina Drave počinje se kod Savreča (202 *m*), a ona Plitvice kod Cerja (185 *m*).

3. *Zona 20, kol. 15;* Varaždin:

Plitvica (Drava)	20·82 *Km²* .	95·57 *Km²*
Bednja „	5·53 „ . .	31·09 „
Gliboki pot. (Drava) . . .	— . .	33·40 „
Drava ostala	— . .	99·15 „
	26·35 „ . .	259·25 „

HS. = 285·60 Km²

Bilješka. Prema prirodnim granicama (po matici Drave) pripada HS. = 279·44 *Km²*.

4. *Zona 20, kol. 16;* Kaniža:

Gliboki pot. (Drava) . . .	— . .	7·55 *Km²*
Drava ostala	— . .	6·71 „
		14·26 „

HS. = 14·26 Km²

Bilješka. Prema prirodnim granicama pripada HS. = 34·74 *Km²*.

Digitized by Google

5. *Zona 21, kol. 13;* Rogatac:

	Pobrđe	*Ravnina*
Krapina (Sava l.)	37·07 *Km²* .	— *Km²*
Sutla (Sava l.)	78·05 „ . .	7·10 „
Mala Krapina (Krapina) . .	24·32 „ . .	—
Horvatski p.. „ . .	200·36 „ . .	4·61 „ .
	339·80 „ . .	11·71 „

HS. = 351·51 Km²

Bilješke. Ravnina Sutle na ovom listu sastoji se od tri nesuvisla dijela: jedan dopire od prilike do Klanjca; drugi je između Sv. Petra i Kumrovca, a treći od Deckmannsdorfa u Štajerskoj do Poljane u Hrvatskoj. U najnižem je dijelu maksimalna apsolutna visina ravnine ca. 180 *m*, u srednjem i gornjem ca. 190 *m*. — Ravninu Horvatskoga potoka izmjerio sam do Tuhlja i Klokovca, gdje je apsolutna visina od prilike 155 *m*.

6. *Zona 21, kol. 14;* Krapina:

Krapina (Sava l.) . .	408·74 *Km²*	53·86 *Km²*
Lonja-Trebeš (Sava l.) .	143·10 „	8·64 „
Bednja (Drava) . . .	215·72 „	24·56 „
Plitvica „ . . .	20·79 „	—
Horvatski p. (Krapina) .	27·08 „	7·26 „
Mala Krapina „ .	146·02 „	16·21 „
Toplica „ . .	0·48 „	1·14 „
	961·93 „	111·67 „

HS. = 1073·60 Km²

Bilješke. Ravnina Krapinice počinje se kod Krapine (ca. 180 *m*); ona rijeke Krapine i omanjih njenih pritoka kod Sutinskoga (175 *m*), Ladislavca (ca. 200 *m*), Borkovca (ca. 190 *m*), Bistrice (ca. 190 *m*) i zap. Hrašćine (ca. 180 *m*); ravnina pak Lonje počinje se kod Huma (ca. 165 *m*). — Ravnina Bednje sastoji se od tri dijela: jedan se proteže od Lepoglave (u aps. v. ca. 220 *m*) do Salinovca, drugi od Margečana do Strmca, a treći od Presečna dalje. Otvorena nizina Bednje počinje se kod Slanja u ca. 160 *m* a. v. (Zona 21, kol. 15.)

Digitized by Google

	Pobrđe	*Ravnina*
7. *Zona 21, kol. 15;* Koprivnica:		
Gliboki p. (Drava)	103·20 *Km²*	82·35 *Km²*
Plitvica „	39·36 „	—
Bednja „	159·34 „	36·05 „
Lonja-Trebeš (Sava l.) . . .	20·01 „	—
Černec (Glogovnica česm.) .	156·16 „	22·17 „
Glogovnica (Česma)	155·63 „	16·82 „
Veliki potok „	129·67 „	10·75 „
Plavnica „	4·99 „	—
Koprivnica (Drava)	118·61 „	18·50 „
	886·97 „	186·64 „

HS. = 1073·61 Km²

Bilješka. Ravnina Bednje počinje se kod Presečna (ca. 192 *m*), Glibokoga potoka kod Rijeke (205 *m*), Koprivnice kod Lepavine (186 *m*), Černca kod Fodrovca (ca. 150 *m*), Miholjca (ca. 140 *m*), Sv. Petra (152 *m*) i Žibrinovca (ca. 175 *m*), Glogovnice pod Gracem (186 *m*), kod Bošnjana (160 *m*) i Carovdara (ca. 160 *m*), a Vel. Potoka kod Maslarca (ca. 145 *m*) i Velike d. (155 *m*).

8. *Zona 21, kol. 16;* Berzence:		
Koprivnica (Drava) . . .	79·75 *Km²*	90·02 *Km²*
Gliboki p. „ . . .	—	21·79 „
Drava ostala	73·23 „	433·02 „
Plavnica (Česma)	5·83 „	—
	158·81 „	544·83 „

HS. = 703·64 Km²

Bilješke. Prirodno pripada HS. = 610·66 *Km²*. — Poradi ograničenja Koprivnice prošao sam poprijeko kanalu Čivičevcu kod Molva.

9. *Zona 22, kol. 12;* Rudolfovo:	
Krka (Sava d.)	0·72 *Km²*
*Blato I (Kupa l.) P. . .	0·91 „
Krš „	0·78 „
	2·41 „

HS. = 2·41 Km²

Digitized by Google

	Pobrđe	*Ravnina*
10. *Zona 22, kol. 13;* Samobor:		
Krapina (Sava l.)	42·62 *Km²*	27·14 *Km²*
Sutla „ „	47·21 „	10·14 „
Kupčina (Kupa l.)	36·10 „	—
Krka (Sava d.)	18·02 „	—
Sava desna ostala	155·95 „	69·36 „
Sava lijeva ostala	37·29 „	25·44 „
*Blato I (Kupa l.) P. . . .	0·68 „	—
*Boljara „ „ P. . . .	1·93 „	—
Krš „ „	39·78 „	—
	379·58 „	132·08 „

HS. = 511·66 Km²

11. *Zona 22, kol. 14;* Zagreb:		
Krapina (Sava l.)	127·47 *Km²*	19·85 *Km²*
Lonja-Trebeš (Sava l.) . .	237·90 „	169·74 „
Toplica (Krapina)	86·13 „	2·04 „
Odra (Kupa l.)	—	7·01 „
Sava desna ostala	—	73·20 „
Sava lijeva „	207·50 „	143·53 „
*Ponikva P. (Sava l.) . . .	1·02 „	—
Krš (Sava l.)	3·02 „	—
	663·04 „	415·37 „

HS. 1078·41 Km²

Bilješka. Ravnina Toplice počinje se kod Stubičkih Toplica u ca. 160 *m* a. v.

12. *Zona 22, kol. 15;* Dubrava:		
Lonja-Trebeš (Sava l.) . . .	87·44 *Km²*	87·62 *Km²*
Černec (Glogovnica česm.) .	72·15 „	49·72 „
Česma (Lonja)	141·89 „	86·90 „
Glogovnica (Česma) . . .	135·53 „	61·47 „
Sredska „	45·99 „	9·48 „
Grabovnica „	8·52 „	—
Bjelovačka „	5·03 „	4·86 „
Plavnica „	63·27 „	11·40 „
Veliki potok „	88·94 „	28·91 „
Žavnica „	86·06 „	3·23 „
	734·82 „	343·59 „

HS. = 1078·41 Km².

Digitized by Google

Bilješka. Ravnina Sredske počinje se kod Martinca (ca. 137 *m*), kod Sušnjara, Laminca (132 *m*) i Uliskana, a Žavnice kod Farkaševca (110 *m*).

13. *Zona 22, kol. 16;* Bjelovar:

	Pobrđe		*Ravnina*	
Drava	222·30	*Km²*	204·32	*Km²*
Peratovica (Ilova)	14·58	„	—	
Česma (Lonja)	37·66	„	24·21	„
Grđevica (Česma)	87·36	„	8·03	„
Račačka „	96·70	„	18·45	„
Sredska „	4·46	„	6·72	„
Severinska „	145·32	„	20·41	„
Bjelovačka „	74·39	„	9·94	„
Kovačica „	49·52	„	3·15	„
Plavnica „	42·66	„	1·79	„
	774·95	„	297·02	„

HS. 1071·97 Km².

Bilješke. Prirodno pripada HS. = 1069·39 *Km²*, a Ugarskoj = 9·02 *Km²*. — Ravnina Plavnice počinje se kod Starčevljana (130 *m*), Bjelovačke kod ž. post. Mišulinovca (ca. 155 *m*), Severinske kod Ciglene (ca. 130 *m*), Orovca (140 *m*), Kašljavca (137 *m*), Lasovca (130 *m*) i juž. Bedeničke (140 *m*), Račačke kod Badovinca (145 *m*), Čađavca (145 *m*) i Bubna (142 *m*), Kovačice kod V. Grđevca (125 *m*), a Grđevice kod Bubna (145 *m*) i Topolovice (145 *m*).

14. *Zona 22, kol. 17;* Virovitica:

Drava	70·79	*Km²*	528·38	*Km²*
Ilova (Sava)	16·01	„	—	
	86·80	„	528·38	„

HS. 615·18 Km².

Bilješka. Prirodno pripada HS. = 572·66 *Km²*.

15. *Zona 22, kol. 18;* Miholjac:

Karašica	—		3·21	*Km²*
Drava ostala	—		125·32	„
			128·53	„

HS. = 128·53 Km².

Bilješka. Prirodno pripada HS. = 118·37 *Km²*.

Digitized by Google

	Pobrđe	*Ravnina*
16. *Zona 22, kol. 19;*		
Drava	—	0·11 *Km*²

HS. = 0·11 Km².

Bilješka. Prirodno ne pripada HS. ništa.

17. *Zona 23, kol. 11;* Čabar:

Čabranka (Kupa)	24·50 *Km*²	—
Kupa desna	24·38 „	—
*Gerovčica P.	23·59 „	—
*Prezid P.	2·78 „	—
Krš (Kupa d.)	152·77 „	—
	228·02 „	—

HS. = 228·02 Km².

Bilješka. Prijeporno zemljište između Hrvatske i Istre obuhvata 1·27 *Km²*.

18. *Zona 23, kol. 12;* Kočevje:

Kupa desna	25·09 *Km*²	5·43 *Km*²
Sušica (Kupa l.)	12·03 „	—
Kupa lijeva ostala	0·12 „	—
*Blato I. P.	0·97 „	—
Krš na desnoj Kupi . . .	15·56 „	—
Krš na lijevoj Kupi . . .	19·96 „	—
	73·73 „	5·43 „

HS. = 79·16 Km².

19. *Zona 23, kol. 13;* Jaska:

Sava desna	15·54 *Km*²	9·97 *Km*²
Kupa desna	64·75 „	32·50 „
Dobra d. (Kupa d.) . . .	48·53 „	4·59 „
Kremešnica (Kupa d.) . .	3·92 „	—
Korana (Kupa d.)	—	0·49 „
Kupa lijeva	60·87 „	96·69 „
Kupčina (Kupa l.)	302·14 „	271·97 „
Veliki potok (Kupa l.) . .	0·75 „	9·85 „
*Jamnik (Kupa lijeva) P. .	1·47 „	—
*Cetosić „ „ P. . .	0·43 „	—

Digitized by Google

	Pobrđe	*Ravnina*
*Krasni vrh p. (K. l.) P. .	0·92 *Km²*	—
*Danculović (Kupa l.) P. . .	1·65 „	—
*Tupac p. „ „ P. . .	1·10 „	—
*Dvorišće p. „ „ P. . .	4·65 „	—
*Blato I (Kupa lijeva) P. . .	2·88 „	—
*Blato II „ „ P. . .	1·53 „	—
Krš na desnoj Kupi . . .	92·29 „	—
Krš na lijevoj Kupi . . .	26·32 „	—
	629·74 „	. . 426·06 *Km²*

HS. 1055·80 Km².

Bilješka. Ravnina Dobre donje počinje se kod 120 *m* a. v., ona Kupe (gornjega Pokuplja) kod 120 *m*, Velikoga potoka kod 130 *m*, a Kupčine kod Pribića (ca. 150 *m*).

20. *Zona 23, kol. 14;* Vel. Gorica:

Sava desna	39·80 *Km²*	. . 80·23 *Km²*
Sava lijeva	—	. . 32·80 „
Lonja (Sava lijeva) . . .	—	. . 52·34 „
Kupa desna	9·56 „	. . 6·43 „
Kremešnica (Kupa d.) . . .	13·21 „	. . --
Kupa lijeva	56·91 „	. . 7·91 „
Kupčina (Kupa l.)	4·18 „	. . —
Odra „ „	251·53 „	. . 324·70 „
Veliki pot. „ „	35·52 „	. . 9·84 „
Roženica „ „	41·88	—
Hotnja „ „	37·20	—
Kravaršćica „ „	79·14	—
	568·93 „	. . 514·25 „

HS. = 1083·18 Km².

Bilješka. Ravnina Odre počinje se kod ca. 125 *m*.

21. *Zona 23, kol. 15;* Ivanić:

Lonja (Sava l.)	52·97 *Km²*	. . 329·72 *Km²*
Ilova (Lonja)	194·75 „	. . —
Garešnica (Ilova)	38·52 „	. . 1·26 „
Bršljanica „	24·86 „	. . —
Česma (Lonja)	92·10 „	. . 95·44 „

Digitized by Google

	Pobrđe		*Ravnina*	
Grabovnica (Česma) . . .	53·74	*Km²*	8·33	*Km²*
Sredska „	81·48	„	4·85	„
Glogovnica „	1·74	„	2·28	„
Odra (Kupa l.)	—		18·95	„
Sava desna	—		32·39	„
Sava lijeva	—		49·82	„
	540·16	„	543·04	„

HS. = 1083·20 Km².

Bilješka. Ravnina Garešnice počinje se kod g. Garešnice (145 *m*), Sredske kod Samarice (145 *m*), a Grabovnice kod Miklouše (127 *m*).

22. *Zona 23, kol. 16;* Daruvar:

Česma (Lonja)	22·51	*Km²*	10·28	*Km²*
Grđevica (Česma)	72·93	„	11·13	„
Kovačica „	0·30	„	0·85	„
Trnovitica „	89·06	„	3·02	„
Sredska „	23·28	„	4·42	„
Ilova (Lonja)	249·00	„	70·00	„
Čavlovica (Ilova)	69·54	„	7·08	„
Bršljanica „	29·33	„	4·11	„
Garešnica „	67·48	„	11·13	„
Riječka „	20·26	„	4·36	„
Peratovica „	40·88	„	3·14	„
Toplica „	103·16	„	16·33	„
Bijela (Pakra)	135·28	„	14·33	„
	923·01	„	160·18	„

HS. = 1083·19 Km².

Bilješke. Toplicu sam izmjerio samo do utoka u lijevi rukav Ilove 2 *Km* južno od sela Kajgani; prema tome je Čavlovica pritok Ilove, a ne Toplice. — Ravnina Česme počinje se odmah kod izvora pod šumom Česmom (120 *m*), Sredske iznad Smiljanića (128 *m*), Trnovitice (Krnjače) 125 *m*, Čavlovice kod Blagorodovca (122 *m*), Bršljanice kod Bršljanice (130 *m*), Peratovice kod g. Rašenice (134 *m*), Bijele kod Sirača (165 *m*), a Toplice kod Daruvara (156 *m*). — Barnu sam držao za pritok Grđevice.

Digitized by Google

23. *Zona 23, kol. 17;* Slatina:

	Pobrđe	*Ravnina*
Orljava (Sava l.)	4·45 *Km²*	—
Pakra (Lonja)	6·54 „	—
Bijela (Pakra)	93·48 „	—
Toplica (Ilova)	9·24 „	—
Ilova (Lonja)	67·59 „	4·69 *Km²*
Brzaja (Orljava)	75·11 „	—
Veličanka „	14·71 „	—
Riječka (Ilova)	66·25 „	1·50 „
Karašica (Drava)	381·03 „	74·52 „
Drava ostala	198·66 „	85·42 „
	917·06 „	166·13 „

HS. = 1083·19 Km².

Bilješka. Ravnina Drave (Čađavice) počinje se na ovom listu kod Lisičina (168 *m*), Karašice (Vučinke) kod Vočina (ca. 205 *m*) i (Vojlovice) kod Lončarevića (194 *m*), Ilove kod Removca (156 *m*), a Riječke kod Katinca (200 *m*).

24. *Zona 23, kol. 18;* Orahovica:

Karašica (Drava)	144·66 *Km²*	829·56 *Km²*
Drava	— „	105·63 „
	144·66 „	935·18 „

HS. = 1079·84 Km².

Bilješka. Prirodno pripada HS. = 1077·85 *Km²*.

25. *Zona 23, kol. 19;* Osijek:

Drava	—	422·38 *Km²*
Karašica	—	118·97 „
		541·35 „

HS. = 541·35 Km².

Bilješke. Prirodno pripada HS. = 531·40 *Km²*. — Vučicu sam pribrojio sistemu Karašice.

Digitizeo by Google

	Pobrđe	*Ravnina*
26. *Zona 23, kol. 20;* Apatin:		
Dunav	38·87 *Km²*	30·90 *Km²*
Drava	1·36 „	16·18 „
	40·23 „	47·08 „

HS. = 87·31 Km².

Bilješka. Prirodno pripada HS. = 98·59 *Km²*.

27. *Zona 24, kol. 11;* Rijeka:		
Kupa desna	53·67 *Km²*	—
Kupica (Kupa d.)	15·68 „	—
Rječina	35·90 „	—
Bujice jadranske	32·46 „	—
Draški potok	3·62 „	—
Dubračina	3·26 „	—
*Gerovčica P.	4·34 „	—
*Ličanka A.	45·22 „	8·80 *Km²*
*Crnoluški potok P. . . .	3·68 „	—
*Velika voda P.	8·69 „	1·39 „
Krš (Kupa desna)	578·77 „	—
	785·29 „	10·19 „

HS. = 795·48 Km².

Bilješka. Izrazom „bujice jadranske“ obuhvaćam sve sušike, koji u kišno doba teku u Jadransko more, a nijesu poimence spomenuti u ovom popisu.

28. *Zona 24, kol. 12;* Ogulin:		
Kupa desna	31·99 *Km²*	—
Kupica (Kupa d.)	42·09 „	—
Dobra donja (Kupa d.) . . .	17·07 „	—
*Dobra gornja P.	137·54 „	5·96 *Km²*
*Kupjak p. A.	1·68 „	0·90 „
*Jasenak (25, 12) P. . . .	5·10 „	1·02 „
*Bosiljevac (24, 13) P. . . .	3·80 „	—
*Poljana p. P.	0·85 „	—
*Gregoračev p. A.	1·08 „	0·18 „
Krš (Kupa d.)	695·56 „	—
	947·96 „	8·06 „

HS. = 945·02 Km².

Digitized by Google

	Pobrđe		*Ravnina*	
29. *Zona 24, kol. 13;* Karlovac:				
Radonja (Korana)	171·73	*Km²*	5·57	*Km²*
Utinja gornja (Kupa d.)	102·13	„	8·29	„
Kupa desna	47·71	„	27·87	„
Glina (Kupa d.)	45·23	„	—	
Dobra donja (Kupa d.)	31·26	„	—	
Mrežnica (Korana)	43·54	„	2·36	„
Trebinja (Kupa d.)	31·14	„	3·15	„
Korana „ „	77·88	„	12·76	„
Trepča „ „	43·24	„	—	„
Kremešnica „ „	11·91	„	—	„
Kupa lijeva	—	„	17·48	„
*Dobrislavić P.	2·42	„	—	
*Zagorski p. P.	0·60	„	—	
*Tomašević p. P.	0·91	„	—	
*Ponorac p. P.	2·06	„	—	
*Bosiljevac p. P.	0·97	„	—	
*Grubišić p. P.	1·39	„	—	
Krš lijeve Kupe	4·48	„	—	
Krš desne „	386·08	„	—	
	1004·69	„	77·48	„

HS. = 1082·17 Km².

Bilješka. Ravnina Mrežnice počinje se kod d. Mrzloga polja (118 *m*), Korane kod d. Velemerića (118 *m*), Radonje kod Vojnića (153 *m*) i Blagovićsela (142 *m*), Trebinje kod Vukmanića (134 *m*), Utinje g. kod Utinje (133 *m*) i Sjeničaka (146 *m*).

30. *Zona 24, kol. 14;* Petrinja:				
Kupa desna	59·67	*Km²*	35·17	*Km²*
Glina (Kupa d.)	233·46	„	50·69	„
Maja (Glina)	95·75	„	21·34	„
Čemernica (Glina)	53·13	„	10·36	„
Buzeta „	50·33	„	—	
Sunja (Kupa d.)	11·10	„	—	
Petrinja „ „	90·60	„	14·67	„
Trepča „ „	90·60	„	10·97	„
Utinja donja „	84·06	„	2·04	„
Golinja „	49.06	„	—	„

Digitized by Google

	Pobrđe		*Ravnina*	
Kremešnica (Kupa d.)	18·07 *Km*²	. . .	—	
Kupa lijeva	47·92 „	. . .	44·26 *Km*²	
Hotnja (Kupa lijeva)	13·25 „	. . .	0·92 „	
Roženica „ „	0·55 „	. . .	—	
	897·55 „	. . .	190·42 „	

HS. = *1087·97 Km*².

Bilješke. Ravnina Trepče sastoji se od četiri nesuvisla dijela: kod ušća (1·33 *Km*²) 110 *m*, kod ušća male Trepče (0·67 *Km*²) 112 *m*, kod Kirina (2·79 *Km*²) 120 *m*, a kod Vrgina mosta (6·18 *Km*²) 135 *m* najveće aps. vis. Ravnina Gline sastoji se od tri nesuvisla dijela: od ušća do utoka Buzete (42·20 *Km*²) 116 *m* (kod Novoga sela), oko Topuskoga (3·70 *Km*²) 123 *m* i kod Vorkapića (4·79 *Km*²) 127 *m* a. v. maksimalne. Ravnina Maje počinje se kod Milakovića (148 *m*) i (Bručine) kod M. Graca (Bručine, 180 *m*), a Hotnje kod 104 *m*. Ravnina Petrinje uz vodu do Budičine (134 *m*) obuhvata 10·68 *Km*², a drugi (gornji) dio od Mlinoge do Mirčinovića (210 *m*) 3·99 *Km*². Ravnina Čemernice počinje se kod Čemernice (ca. 130 *m*) i istočno od Blatuše (ca. 132 *m*), a Utinje d. kod Mokrice (110 *m*).

31. *Zona 24, kol. 15;* Sisak:

Ilova (Lonja)	6·40 *Km*²	. . .	25·13 *Km*²
Lonja-Trebeš (Sava l.) . . .	12·32 „	. . .	205·94 „
Kupa desna	19·88 „	. . .	19·69 „
Sava desna	83·85 „	. . .	113·87 „
Sunja (Sava d.)	198·33 „	. . .	143·41 „
Petrinja (Kupa d.)	0·97 „	. . .	—
Kupa lijeva	—	. . .	14·02 „
Odra (Kupa l.)	—	. . .	1·33 „
Sava lijeva	—	. . .	202·98 „
Pakra (Lonja)	—	. . .	14·74 „
Strug (Sava l.)	—	. . .	25·13 „
	321·75 „	. . .	766·24 „

HS. = *1087·99 Km*².

Bilješka. Ravnina Sunje dopire do kraja sela Svinice (150 *m*) i do Komogovine (220 *m*); ona Kupe (Moštanice) do Moštanice (150 *m*), a Save (Blinje) do Blinje — Staroga sela (135 *m*) i (Graduse) do Severovca (135 *m*).

Digitized by Google

32. *Zona 24, kol. 16;* Pakrac:

	Pobrđe		*Ravnina*	
Trnava (Sava l.)	80·67	*Km²*	14·99	*Km²*
Strug „ „	205·64	„	202·32	„
Lonja-Trebeš „	3·69	„	12·39	„
Sava lijeva	1·87	„	5·14	„
Ilova (Lonja)	46·19	„	21·39	„
Pakra „	226·57	„	41·64	„
Bijela (Pakra)	61·27	„	14·68	„
Subocka (Strug)	105·03	„	31·42	„
Sava desna	—	„	3·02	„
Una lijeva	—	„	2·60	„
	730·93	„	349·59	„

HS. = 1080·52 Km².

Bilješka. Ravnina Struga (Sloboštine) počinje se kod Trnakovca (ca. 180 *m*), Pakre kod Španovića (ca. 225 *m*), Subocke kod Čaglića (ca. 180 *m*), Bijele kod Grahovljana (170 *m*).

33. *Zona 24, kol. 17;* Požega:

Karašica (Drava)	19·89	*Km²*	—	
Pakra (Lonja)	52·44	„	—	
Sava lijeva	2·59	„	2·23	*Km²*
Londža (Orljava)	3·62	„	2·89	„
Orljava (Sava l.)	339·55	„	42·87	„
Trnava „ „	64·98	„	8·80	„
Orljavica (Orljava)	69·32	„	6·09	„
Brzaja „	38·94	„	1·51	„
Veličanka „	100·00	„	15·56	„
Kaptolka „	43·22	„	1·39	„
Vrbova (Londža)	121·59	„	10·79	„
Kutjevačka (Londža)	0·30	„	—	
Crnac (Sava l.)	134·43	„	5·00	„
	990·87	„	97·13	„

HS. = 1088·00 Km².

Bilješka. Ravnina Vrbove (i Vetovke) počinje se kod Sesveta (ca. 135 *m*) i Čaire (190 *m*), Kaptolke kod Turnića (ca. 150 *m*), Veličanke na jugu Velikoj (220 *m*), Orljavice kod Oblakovca (250 *m*), Orljave kod Mihača (235 *m*), Brzaje kod

Digitized by Google

Mihalića (270 *m*), Crnca kod Baćindola (165 *m*), a Trnave kod Sumetlice (ca. 210 *m*).

34. *Zona 24, kol. 18;* Našice:

	Pobrđe		*Ravnina*	
Karašica (Drava)	203·16	*Km²*	61·88	*Km²*
Glogovnica (Sava l.)	38·60	„	—	
Bosut „ „	237·08	„	9·22	„
Orljava „ „	27·09	„	—	„
Londža (Orljava)	288·46	„	20·85	„
Vrbova „	22·51	„	—	
Kutjevačka (Orljava)	83·13	„	7·37	„
Vuka (Dunav)	64·53	„	24·08	„
	964·56	„	123·40	„

HS. = *1087·96 Km².*

Bilješka. Ravnina Karašice počinje se kod Gazja (ca. 190 *m*), kod Motičine g. (200 *m*), kod Seone (ca. 160 *m*), kod Zoljanbrda (ca. 160 *m*), kod Vukojevaca (125 *m*) i kod Kršinaca (135 *m*); ravnina Vuke počinje se kod Čakotinca (144 *m*) ili kod Borovika (ca. 138 *m*); ravnina Bosuta i njegovih pritoka kod Gašinaca (ca. 105 *m*) i Trnave (ca. 125 *m*), zatim Breznice (pritoka Bosuta) kod Svetoblažja (ca. 105 *m*), a gornja ravnina kod Prevale (149 *m*); ravnina Londže kod Ruševca (195 *m*) i Pake (195 *m*); napokon ravnina Kutjevačke na jugu Kutjevu (ca. 200 *m*).

35. *Zona 24, kol. 19;* Đakovo:

Vuka (Dunav)	78·67	*Km²*	638·61	*Km²*
Bosut (Sava l.)	190·31	„	175·83	„
Rvenica	—		3·18	„
Srijemska ploča	—		1·30	„
	268·98	„	818·92	„

HS. = *1087·90 Km².*

36. *Zona 24, kol. 20;* Vukovar:

Dunav	6·59	*Km²*	164·30	*Km²*
Vuka (Dunav)	29·16	„	93·46	„
Bosut (Sava l.)	18·19	„	5·00	„

Digitized by Google

	Pobrđe	*Ravnina*
Rvenica	—	. . . 4.49 *Km²*
Srijemska ploča	—	. . . 162·93 „
	53·94 *Km²*	. . . 430·18 „

HS. = 484·12 Km².

Bilješke. Srijemska je ploča ograničena ovim objektima: Mohovo (87 *m*), Opatovac (85 *m*), Sotin (podnožje, ca. 90 *m*), Skendra, Vukovar (ca. 90 *m*), Marinci (ca. 90 *m*), Nuštar (ca. 90 *m*) i Mirkovci na jugozapadu (ca. 90 *m*). — Izuzeo sam iz areala srijemske ploče poriječja onih tekućica, koje se ulijevaju u Dunav ili Bosut.

37. *Zona 24, kol. 21;* Petrovac:

Dunav	—	. . . 0·84 *Km²*

HS. = 0·84 Km².

38. *Zona 24, kol. 22;* Novi sad:

Dunav	0·56 *Km²*	. . . 21·27 *Km²*

HS. = 21·83 Km².

39. *Zona 25, kol. 11;* Novi:

Dubračina A.	41·88 *Km²*	—
Suha rječina A.	21·30 „	—
Bujice jadranske	37·98 „	—
*Ličanka A.	1·15 „	—
Krš (Kupa d.)	76·13 „	—
	178·44 „	—

HS. = 178·44 Km².

40. *Zona 25, kol. 12;* Brinj:

Mrežnica istočna (Korana) . .	0·86 *Km²*	. . . —
Bujice jadranske	66·78 „	—
*Sušik P.	37·26 „	. . . 5·70 *Km²*
*Drežnički donji p. P. . . .	13·20 „	. . . 2·82 „
*Jasenački p. P.	19·52 „	. . . 1·32 „
*Pećina crnačka P.	10·20 „	. . . 2·64 „
*Jezeranska jar. P.	23·56 „	. . . 4·94 „
*Lučani p. A.	0·60 „	—

Digitized by Google

	Pobrđe	*Ravnina*
*Krbavica brinjska A. . . .	2·76 *Km²*	0·66 *Km²*
*Rajačić p. A.	2·10 „	—
*Sokolovac p. A. (26, 12) . .	2·70 „	0·66 „
*Brinjski p. A. (26, 12) . . .	3·30 „	0·12 „
*Radojičić p. P.	2·64 „	—
*Munjava P.	20·82 „	—
*Dretulja P. (25, 13)	21·34 „	—
*Jelenkovac P.	5·55 „	—
*Bošt P.	1·83 „	—
*Krakar P.	11·16 „	1·44 „
*Sovenica P.	1·32 „	—
*Mrežnica zap. P.	54·12 „	—
Krš (Kupa d.)	737·35 „	—
	1038·97 „	20·30 „

HS. = 1059·27 Km².

41. *Zona 25, kol. 13;* Slunj:

Glina (Kupa d.)	174·87 *Km²*	1·80 *Km²*
Korana „ „	78·53 „	11·04 „
Rađonja (Korana)	12·08 „	—
Mrežnica istočna	16·77 „	—
*Dretulja P.	32·07 „	4·56 „
*Rabinja P.	4·46 „	—
*Perlinac P.	3·72 „	—
*Rakovica (26, 13) P. . . .	2·46 „	—
*Kršlje (26, 13) P.	3·26 „	—
*Jasenica (26, 13) P.	1·32 „	0·54 „
*Grahovac P.	2·29 „	—
*Pećina (Blato) P.	3·30 „	1·02 „
*Pavlešić P.	1·43 „	—
*Vojnovac P.	1·32 „	—
*Supice P.	2·16 „	—
*Šumonić P.	2·22 „	—
*Pavlić P.	1·83 „	—
*Raketovac P.	0·69 „	—
*Pović P.	0·74 „	—
*Pribilić P.	1·03 „	—
*Lađevac P.	0·46 „	—

Digitized by Google

	Pobrđe	*Ravnina*
*Cvitović P.	1·66 *Km²*	—
*Tovac P.	0·51 „	—
*Kremen p. P.	0·34 „	—
*Vuković p. P.	0·23 „	—
Krš (Kupa d.)	605·40 „	—
	955·15 „ . . .	18·96 *Km²*

HS. = 974·11 Km².

42. *Zona 25, kol. 14;* Žirovac:

Glina (Kupa d.)	58·22 *Km²* . . .	3·36 *Km²*
Glinica (Glina)	56·53 „	—
Maja „	79·62 „	—
Petrinja (Kupa d.)	31·99 „	—
Sunja (Sava d.)	14·31 „	—
Žirovac (Una l.)	282·20 „ . . .	5·25 „
Una lijeva	10·83 „ . . .	0·84 „
	533·70 „ . . .	9·45 „

HS. = 543·15 Km².

Bilješka. Ravnina Gline izdiže se kod Katinovca (1·20 *Km²*) najviše do 127 *m*, kod Crkvina (1·50 *Km²*) do 128 *m*, a kod Raštela (0·66 *Km²*) do 130 *m*; ravnina Žirovca kod Stupnice 165 *m*, a kod Radišića ca. 160 *m*; ona pak Une izdiže se do 135 *m*.

43. *Zona 25, kol. 15;* Kostajnica:

Sunja (Sava d.)	79·80 *Km²* . . .	20·28 *Km²*
Žirovac (Una)	67·03 „ . . .	7·91 „
Una lijeva ostala	126·61 „ . . .	22·91 „
Sava desna	— . . .	4·02 „
	273·44 „ . . .	55·12 „

HS. = 328·56 Km².

Bilješka. Ravnina Une izdiže se do ca. 130 *m* kod Stanića, ona Žirovca kod Glavičana do ca. 150 *m*, a kod Kepaca također do ca. 150 *m*.

44. *Zona 25, kol. 16;* St. Gradiška:

Trnava (Sava l.)	6·63 *Km²* . . .	42·55 *Km²*
Sava lijeva	1·45 „ . . .	72·98 „

Digitized by Google

	Pobrđe	*Ravnina*
Sava desna	—	3·01 *Km²*
Strug (Sava l.)	—	105·95 „
Una lijeva	—	7·29 „
Una desna	—	3·56 „
	8·08 *Km²*	235·34 „

HS. = 243·42 Km².

Bilješka. Ravnina Trnave na ovom se listu počinje kod ca. 115 *m*.

45. *Zona 25, kol. 17;* Oriovac:

Orljava (Sava l.)	78·44 *Km²*	61·68 *Km²*
Mrsunja „ „	24·91 „	40·34 „
Crnac „ „	28·45 „	194·90 „
Trnava „ „	—	12·30 „
Sava lijeva	—	144·69 „
	131·80 „	453·91 „

HS. = 585·71 Km².

Bilješka. Ravnina Orljave (Radovice) izdiže se kod donjega Lipovca do 130 *m*, Mrsunje kod Stupničkoga brda do 114 *m*, a Crnca kod Oštroga vrha do 140 *m*.

46. *Zona 25, kol. 18;* Brod:

Bosut (Sava l.)	93·76 *Km²*	171·13 *Km²*
Glogovnica (Sava l.)	51·69 „	23·43 „
Mrsunja „ „	64·95 „	79·31 „
Orljava „ „	9·95 „	2·37 „
Sava lijeva ostala	2·01 „	142·44 „
	222·36 „	418·68 „

HS. = 641·04 Km².

Bilješka. Ravnina Bosuta (Biđa) dopire kod Šušnjevaca do ca. 125 *m*, ona Orljave (Gnojnice) do 162 *m*, ona Mrsunje kod Sibinja do 118 *m*, a ona Glogovnice do ca. 140 *m*.

47. *Zona 25, kol. 19;* Gradište:

Bosut (Sava l.)	—	699·67 *Km²*
Sava lijeva ostala	—	120·58 „
		820·25 „

HS. = 820·25 Km².

Digitized by Google

	Pobrđe	*Ravnina*
48. *Zona 25, kol. 20;* Šarengrad:		
Bosut (Sava l.)	81·88 *Km²*	780·92 *Km²*
Sava lijeva	—	4·11 „
Dunav	62·31 „	2·85 „
Srijemska ploča	—	152·28 „
	144·19 „	940·16 „

HS. = 1084·35 Km².

Bilješka. Srijemska je ploča na jugu ograničena selima: Laze Orolik, Banovci, Tovarnik i Šid, u blizini kojega prestaje; na sjeveru se pak provlači sve do Suseka (na Zoni 25, kol. 21).

49. *Zona 25, kol. 21;* Ilok:		
Dunav	278·90 *Km²*	46·02 *Km²*
Bosut (Sava l.)	21·55 „	10·83 „
Sava lijeva	161·27 „	460·82 „
Srijemska ploča	—	30·54 „
	461·72 „	548·21 „

HS. = 1009·93 Km².

Bilješka. Srijemska ploča provlači se na sjeveru do Suseka, a Fruškoj gori na jugu opet se pojavljuje u većoj mjeri kod Stejanovaca i nastavlja se prema istoku.

50. *Zona 25, kol. 22;* Karlovci:		
Budovar (Dunav)	14·58 *Km²*	66·56 *Km²*
Dunav	125·12 „	48·43 „
Sava lijeva	40·78 „	99·76 „
Srijemska ploča	—	409·69 „
	180·48 „	624·44 „

HS. = 804·92 Km².

Bilješke. Ravnina Budovara počinje se kod Gladnosa (222 *m*). — Srijemska se ploča proteže do južnoga ruba ovoga lista, a prema istoku do Dunava.

51. *Zona 25, kol. 23;* Uzdin:		
Dunav	—	3·76 *Km²*
Srijemska ploča	—	7·76 „
		11·52 „

HS. = 11·52 Km².

Digitized by Google

	Pobrđe	*Ravnina*
52 *Zona 26, kol. 12;* Senj:		
Senjski potok	28·01 *Km²*	—
Bujice jadranske	116·17 „	—
*Gacka A.	128·74 „	60·54 *Km²*
*Brinjski potok A.	0·24 „	0·78 „
*Sokolovac p. A.	0·48 „	1·50 „
*Krbavica brinjska A. . . .	6·78 „	2·46 „
*Lika A.	9·66 „	8·22 „
*Letinac A.	10·60 „	1·09 „
*Jaruga dabar. P.	12·54 „	1·56 „
Krš (Kupa d.)	566·11 „	—
	879·33 „	76·15 „

HS. = 955·48 Km².

Bilješka. Iz ravnine Gacke oduzeti su svi humci i pribrojeni pobrđu.

53. *Zona 26, kol. 13;* Plitvice:		
Korana (Kupa d.)	71·71 *Km²*	1·28 *Km²*
Una l. (Sava d.)	2·01 „	—
*Kršlje P.	8·90 „	—
*Gacka A.	53·81 „	14·28 „
*Jasenica P.	20·01 „	2·01 „
*Babin p. A.	24·04 „	7·26 „
*Prijeboj p. P.	12·29 „	—
*Dabarska jar. P.	2·62 „	—
*Rakovica P.	1·38 „	—
*Korenica p. P.	40·63 „	6·16 „
Krš (Kupa d.)	719·57 „	—
	956·91 „	30·99 „

HS. = 987·96 Km².

54. *Zona 26, kol. 14;* Bihać:		
Una lijeva	5·13 *Km²*	0·18 *Km²*
Krš (Una l.)	7·97 „	—
	13·10 „	0·18 „

HS. = 13·28 Km².

Digitized by Google

	Pobrđe	*Ravnina*
55. *Zona 26, kol. 19;* Gradačac:		
Sava lijeva	—	. . . 54·39 *Km²*
HS. = 54·39 Km².		
56. *Zona 26, kol. 20;* Jamina:		
Bosut (Sava l.)	—	. . . 239·87 *Km²*
Sava l.	—	. . . 284·78 „
		524·65 „
HS. = 524·65 Km².		
57. *Zona 26, kol. 21;* Mitrovica:		
Bosut	—	. . . 15·79 *Km²*
Sava l.	—	. . . 383·49 „
Srijemska ploča . . .	—	. . . 15·22 „
		414·50 „
HS. = 414·50 Km².		
58. *Zona 26, kol. 22;* St. Pazova:		
Budovar (Dunav d.) . . .	—	. . . 3·51 *Km²*
Dunav	—	. . . 5·83 „
Sava l.	—	. . . 761·35 „
Srijemska ploča . . .	—	. . . 305·61 „
		1076·30 „
HS. = 1076·30 Km².		

Bilješka. Na ovom listu ograničuju srijemsku ploču od prilike ovi objekti: Buđanovci, Dobrinci, Pećinci, Popinci, Vojka, Nova Pazova, Batajnica, Balkoš salaš, Dobanovci i Surčin s jedne, a Dunav s druge (sjevero-istočne) strane. Prekinuta je rimskim kanalom (s manjim pritokama), zatim Velikim i Malim Begejem.

59. *Zona 26, kol. 23;* Zemun:		
Sava l.	—	. . . 18·38 *Km²*
Dunav	—	. . . 23·10 „
Srijemska ploča . . .	—	. . . 39·28 „
		80·76 „
HS. = 80·76 Km².		

Digitized by Google

Bilješka. Na ovom listu dopire srijemska ploča do Dunava, Zemuna i Bežanije.

60. *Zona 27, kol. 12;* Karlobag:

	Pobrđe		*Ravnina*	
Bujice jadranske	124·43	*Km²*	—	
*Lika A.	64·92	„	23·93	*Km²*
Novčica (Lika) A. . . .	52·65	„	29·27	„
Otešica (Lika) A. . . .	58·17	„	34·48	„
*Oštarski p. A.	4·42	„	1·27	„
*Makvina A.	1·90	„	—	
*Dolački p. A.	0·75	„	—	
*Filipović p. A.	1·27	„	—	
*Jadovno p. A.	1·42	„	0·31	„
*Slatka voda A.	0·94	„	—	
Krš (Kupa d.)	406·08	„	—	
	716·95	„	89·26	„

HS. = *806·21 Km².*

61. *Zona 27, kol. 13;* Gospić:

*Lika A.	20·60	*Km²*	77·49	*Km²*
Otešica (Lika)	—		2·16	„
Novčica (Lika)	—		37·96	„
Jadova (Lika)	20·24	„	32·68	„
*Krbava P.	38·20	„	18·14	„
*Korenički p. P.	22·71	„	5·83	„
*Krbavica bunićka P. . .	16·58	„	15·86	„
*Krbavica mirićka P. . .	11·81	„	2·07	„
*Karamanuša P.	11·59	„	15·92	„
*Hržić pot. P.	—		12·43	„
*Mutilić pot. A.	8·65	„	1·86	„
*Bijeli pot. (27, 14) P. . .	1·18	„	—	
*Karlovica (27, 14) P. . .	0·96	„	—	
*Bukovača p. P.	1·92	„	—	
*Mezinovac p. A.	3·78	„	3·60	„
*Perušić p. A.	4·56	„	3·90	„
*Čanak p. P.	3·30	„	—	
*Baračev p. P.	7·33	„	—	
*Bunićki p. P.	1·32	„	0·72	„
*Matanićev p. P.	1·62	„	0·66	„

Digitized by Google

	Pobrđe	*Ravnina*
*Kula p. A.	1·32 *Km²*	—
*Kvarta II. A.	—	1·32 *Km²*
*Kvarta I. A.	0·60 „	0·72 „
Krš (Kupa d.)	690·50 „	—
	868·77 „	233·32 „

HS. = 1102·09 Km².

62. *Zona 27, kol. 14;* Lapac:

Una lijeva	14·45 *Km²*	—
*Počučina P.	4·60 „	—
*Srneći p. P.	3·02 „	—
*Hajduković P.	5·14 „	—
*Bukanja P.	5·87 „	4·36 *Km²*
*Kula p. P.	—	0·36 „
*Bijeli potok P.	7·01 „	—
*Karlovica P.	17·05 „	—
*Krbava P.	2·60 „	—
Krš (Kupa d.)	296·93 „	—
	356·67 „	4·72 „

HS. = 361·39 Km².

63. *Zona 27, kol. 21;* Prnjavor:

Sava l.	—	6·33 *Km²*

HS. = 6·33 Km².

64. *Zona 27, kol. 22;* Kupinovo:

Sava l.	—	270·83 *Km²*

HS. = 270·83 Km².

65. *Zona 28, kol. 12;* Pag:

Bujice jadranske	52·82 *Km²*	—
Novčica (*Lika) A	25·89 „	5·20 *Km²*
Krš (Kupa d.)	66·25 „	—
	144·96 „	5·20 „

HS. = 150·16 Km².

Digitized by Google

	Pobrđe	*Ravnina*
66. *Zona 28, kol. 13;* Medak:		
*Lika A.	52·94 *Km²*	97·06 *Km²*
Novčica (Lika)	8·42 „	5·37 „
Jadova „	14·09 „	23·00 „
*Ričice A.	51·17 „	46·69 „
*Otuča A.	18·18 „	2·20 „
*Općenica A.	24·95 „	10·80 „
*Holjevac A.	0·98 „	3·60 „
*Rukavinov p. A.	1·40 „	—
*Krušnica A.	17·14 „	—
*Ljutik p. A. (kod Raduča)	7·87 „	0·85 „
*Debeljača A.	0·55 „	0·12 „
*Mutilić p. A.	6·40 „	0·73 „
*Rudopolje (28, 14) A.	0·85 „	—
Bujice jadranske	6·65 „	—
Krš (Kupa d.).	412·85 „	—
	620·44 „	190·42 „
	HS. = 810 86 Km²	
67. *Zona 28, kol. 14;* Gračac:		
*Otuča A.	58·87 *Km²*	35·68 *Km²*
*Rudopolje p. A.	4·32 „	—
*Glogovo A.	1·80 „	—
*Soviljevac A.	2·10 „	—
*Bukovac A.	6·91 „	—
*Zavlaka P.	3·24 „	—
Una lijeva	80·91 „	—
Una desna	32·50 „	—
Krka	17·60 „	—
Krš (Una lijeva)	435·57 „	—
Krš (Una desna)	55·50 „	—
	699·32 „	35·68 „
	HS. = 735·00 Km².	

Bilješka. Sama ponornica Zavlaka nalazi se na desnoj Uni, sve ostale na lijevoj.

68. *Zona 29, kol. 13;* Novi grad:		
Krš (Zrmanja d.)	2·77 *Km²*	—
	HS. = 2·77 Km².	

Digitized by Google

69. *Zona 29, kol. 14;* Knin:

	Pobrđe	*Ravnina*
Zrmanja desna	20·30 *Km²*	—
Zrmanja lijeva	26·93 „	—
Krka	8·48 „	—
Krš (Zrmanja d.)	89·66 „	—
Krš (Zrmanja l.)	68·12 „	—
	213·49 „	—

HS. = *213·49 Km²*.

Bilješka. Granicu sam od Une (uz vodu) povukao preko Kupirova do šumarske kuće (701 *m*) na popinskoj cesti, zatim po ovoj istoj i kroz Smederovo polje (605 *m*) na doljanski potok i Zrmanju. Sve, što je ovoj granici na zapadu, pribrojio sam lijevoj Uni ili desnoj Zrmanji, a što je na istoku, desnoj Uni ili lijevoj Zrmanji.

Skupivši sve ove rastrkane podatke u cjeline evo koliko areala obuhvataju pojedina poriječja:

Bujice jadranske:

	Pobrđe	*Ravnina*	*Ukupno*
Rječina (sušačka) . . .	35·90 *Km²*	—	—
Draški potok	3·62 „	—	—
Dubračina	45·14 „	—	—
Suha rječina (bribirska) .	21·30 „	—	—
Senjski potok	28·01 „	—	—
ostale bujice	437·29 „	—	—
Sve jadr. bujice . . .	571·26 „	(sve u pobrđu).	

Rijeke jadranske:

Krka	26·09 *Km²*	— —
Zrmanja desna	20·29 „	— —
„ lijeva	26·94 „	— —
Sve jadr. rijeke . . .	73·32 „	(sve u pobrđu).

Dunav:

Vuka	172·36 *Km²*	756·15 *Km²*	928·51 *Km²*
Budovar	14·58 „	70·07 „	84·65 „
ostali Dunav	512·35 „	347·30 „	859·65 „
Sav Dunav	699·29 „	1173·52 „	1872·81 „

Digitized by Google

Drava:

	Pobrđe		*Ravnina*		*Ukupno*	
Plitvica	119·23	*Km²*	152·28	*Km²*	271·51	*Km²*
Bednja	521·44	„	92·60	„	614·04	„
Gliboki p.	103·20	„	145·09	„	248·29	„
Koprivnica	198·36	„	108·52	„	306·88	„
Karašica	748·74	„	1088·14	„	1836·88	„
ostala Drava	596·20	„	2163·76	„	2759·96	„
Sva Drava	2287·17	„	3750·39	„	6037·56	„

Rvenica:

Cijelo poriječje (sve u ravnini) . . . . . 7·67 *Km²*

Sava:

A. Lijevi brijeg Save:

1. Sutla	125·74	*Km²*	17·24	*Km²*	142·98	*Km²*
2. Krapina	1109·69	„	132·11	„	1241·80	„
a) Toplica . . .	86·61	„	3·18	„	89·79	„
b) Krapinica . . .	179·74	„	16·21	„	195·95	„
c) Horvatska . . .	227·44	„	11·87	„	239·31	„
d) ostala Krapina .	615·90	„	100·85	„	716·75	„
3. Lonja-Trebeš sav. .	4383·27	„	1549·55	„	5932·82	„
a) Česma sva . .	2186·22	„	427·65	„	2613·87	„
Grđevica . .	160·29	„	19·16	„	179·45	„
Kovačica . .	49·82	„	4·00	„	53·82	„
Trnovitica . .	89·06	„	3·02	„	92·08	„
Račačka . . .	96·70	„	18·45	„	115·15	„
Sredska . . .	155·21	„	25·47	„	180·68	„
Severinska . .	145·32	„	20·41	„	165·73	„
Bjelovačka . .	79·42	„	14·80	„	94·22	„
Plavnica . . .	116·75	„	13·19	„	129·94	„
Veliki potok .	218·61	„	49·66	„	258·27	„
Žavnica . . .	86·06	„	3·23	„	89·29	„
Glogovnica sva	521·21	„	152·46	„	673·67	„
Crnac . . .	228·31	„	71·89	„	300·20	„
Glogovnica ost.	292·90	„	80·57	„	373·47	„
Grabovnica . .	62·26	„	8·33	„	70·59	„
ostala Česma .	294·16	„	216·83	„	510·99	„
b) Ilova sva . . .	1064·04	„	170·12	„	1234·16	„
Riječka . . .	86·51	„	5·86	„	92·37	„

Digitized by Google

	Pobrđe		*Ravnina*		*Ukupno*	
Peratovica . .	55·46	*Km²*	3·14	*Km²*	58·60	*Km²*
Garešnica . .	106·00	„	12·39	„	118·40	„
Toplica . . .	112·40	„	16·33	„	128·73	„
Čavlovica . .	69·54	„	7·08	„	76·62	„
Bršljanica . .	54·19	„	4·11	„	58·30	„
ostala Ilova .	579·94	„	121·21	„	701·15	„
c) Pakra sva . .	575·58	„	85·39	„	660·97	„
Bijela	290·03	„	29·01	„	319·04	„
ostala Pakra .	285·55	„	56·38	„	341·93	„
4. Strug	310·67	„	364·82	„	675·49	„
Subocka	105·03	„	31·42	„	136·45	„
ostali Strug . .	205·64	„	333·40	„	539·04	„
5. Trnava	152·28	„	78·64	„	230·92	„
6. Crnac	162·88	„	199·90	„	362·78	„
7. Orljava sva . . .	1320·39	„	173·37	„	1493·76	„
a) Brzaja	114·05	„	1·51	„	115·56	„
b) Orljavica . . .	69·32	„	6·09	„	75·41	„
c) Veličanka . . .	114·71	„	15·56	„	130·27	„
d) Kaptolka . . .	43·22	„	1·39	„	44·61	„
e) Londža sva . .	519·61	„	41·90	„	561·51	„
Vrbova . . .	144·10	„	10·79	„	154·89	„
Kutjevačka r. .	83·43	„	7·37	„	90·80	„
ostala Londža .	292·08	„	23·74	„	315 82	„
ostala Orljava . .	459·48	„	106·92	„	566·40	„
8. Mrsunja	89·86	„	119·65	„	209·51	„
9. Glogovnica	90·29	„	23·43	„	113·72	„
10. Bosut	642·77	„	2108·26	„	2751·03	„
ostala lijeva Sava .	454·76	„	3286·87	„	3741·63	„
Sva lijeva Sava . .	8842·60	„	8053·84	„	16.896·44	„
B. Desni brijeg Save:						
1. Krka (Gurk) . . .	18·74	„	—		18·74	„
2. Kupa sva	3387·06	„	1116·78	„	4503·84	„
I. Desne pritoke Kupe:						
a) Kupica	57·77	„	—		57·77	„
b) Dobra donja . .	96·86	„	4·59	„	101·45	„
c) Korana sva . .	473·10	„	33·50	„	506·60	„
Radonja . . .	183·81	„	5·57	„	189·38	„
Mrežnica istočna	61·17	„	2·36	„	63·53	„

Digitized by Google

	Pobrđe	*Ravnina*	*Ukupno*
ostala Korana .	228·12 *Km²*	25·57 *Km²*	253·69 *Km²*
d) Trebinja . . .	31·14 „	3·15 „	34·29 „
e) Utinja gornja .	102·13 „	8·29 „	110·42 „
f) Kremešnica . .	47·11 „	—	47·11 „
g) Trepča	133·84 „	10·97 „	144·81 „
h) Golinja	49·06 „	—	49·06 „
i) Glina sva . . .	847·14 „	87·55 „	934·69 „
Glinica . . .	56·53 „	—	56·53 „
Buzeta . . .	50·33 „	—	50·33 „
Maja	175·37 „	21·34 „	196·71 „
Čemernica . .	53·13 „	10·36 „	63·49 „
ostala Glina .	511·78 „	55·85 „	567·63 „
k) Utinja donja . .	84·06 „	2·04 „	86·10 „
l) Petrinja . . .	123·56 „	14·67 „	138·23 „
ostala Kupa desna .	336·70 „	127·09 „	463·79 „
Sva Kupa desna	2382·47 „	291·85 „	2674·32 „
II. Lijeve pritoke Kupe:			
a) Čabranka . . .	24·50 „	—	24·50 „
b) Sušica metlička .	12·03 „	—	12·03 „
c) Kupčina . . .	342·42 „	271·97 „	614·39 „
d) Veliki potok . .	36·27 „	19·69 „	55·96 „
e) Kravarščica . .	79·14 „	—	79·14 „
f) Roženica . . .	42·43 „	—	42·43 „
g) Hotnja	50·45 „	0·92 „	51·37 „
h) Odra	251·53 „	351·99 „	603·52 „
ostala Kupa lijeva .	165·82 „	180·36 „	346·18 „
Sva Kupa lijeva	1004·59 „	824·93 „	1829·52 „
3. Sunja	303·54 „	163·69 „	467·23 „
4. Una sva	621·67 „	50·54 „	672·21 „
Žirovac	349·23 „	13·16 „	362·39 „
Una desna . .	32·50 „	3·56 „	36·06 „
Una lijeva . . .	239·94 „	33·82 „	273·76 „
ostala desna Sava .	295·14 „	389·07 „	684·21 „
Sva desna Sava .	4626·15 „	1720·08 „	6346·23 „
Sva Sava u HS. . .	13.468·75 „	9773·92 „	23.242·67 „

Digitized by Google

Ponornice:

	Pobrđe	*Ravnina*	*Ukupno*
A. Pontsko područje ponornica:			
1. Između Drave i Save:			
Ponikva	1·02 *Km²*	—	1·02 *Km²*
2. Između Save i Kupe:			
Blato I	5·44 „	—	5·44 „
Dvorišće	4·65 „	—	4·65 „
Boljara	1·93 „	—	1·93 „
Danculović	1·65 „	—	1·65 „
Blato II	1·53 „	—	1·53 „
Jamnik	1·47 „	—	1·47 „
Tupac	1·10 „	—	1·10 „
Krasni p.	0·92 „	—	0·92 „
Cetošić	0·43 „	—	0·43 „
	19·12 „	—	19·12 „
3. Između Kupe i Une:			
Dobra gornja . . .	137·54 „	5·96 *Km²*	143·50 „
Korenica	63·34 „	11·99 „	75·33 „
Krbava	40·80 „	18·14 „	58·94 „
Dretulja	53·41 „	4·56 „	57·97 „
Mrežnica zap. . . .	54·12 „	—	54·12 „
Sušik	37·26 „	5·70 „	42·96 „
Krbavica bunićka .	16·58 „	15·86 „	32·44 „
Jezeranska jaruga .	23·56 „	4·94 „	28·50 „
Karamanuša . . .	11·59 „	15·92 „	27·51 „
Jasenak p.	24·62 „	2·34 „	26·96 „
Gerovčica	23·93 „	—	23·93 „
Jasenica p.	21·33 „	2·55 „	23·88 „
Munjava	20·82 „	—	20·82 „
Karlovica	18·01 „	—	18·01 „
Dabarska jaruga . .	15·16 „	1·56 „	16·72 „
Drežnički d. p. . .	13·20 „	2·82 „	16·02 „
Krbavica miričkа .	11·81 „	2·07 „	13·88 „
Pećina crnačka . .	10·20 „	2·64 „	12·84 „
Krakar	11·16 „	1·44 „	12·60 „
Hržić	—	12·43 „	12·43 „

Digitized by Google

	Pobrđe	*Ravnina*	*Ukupno*
Prijeboj p.	12·29 *Km*²	—	12·29 *Km*²
Kršlje	12·16 „	—	12·16 „
Bukanja	5·87 „	4·36 *Km*²	10·23 „
Velika voda	8·69 „	1·39 „	10·08 „
Bijeli potok	8·19 „	—	8·19 „
Baračev p.	7·33 „	—	7·33 „
Jelenkovac	5·55 „	—	5·55 „
Hajduković p.	5·14 „	—	5·14 „
Bosiljevac p.	4·77 „	—	4·77 „
Počučina p.	4·60 „	—	4·60 „
Rabinja p.	4·46 „	—	4·46 „
Pećina (Blato)	3·30 „	1·02 „	4·32 „
Rakovica	3·84 „	—	3·84 „
Perlinac	3·72 „	—	3·72 „
Crnilug p.	3·68 „	—	3·68 „
Čanak p.	3·30 „	—	3·30 „
Srneći p.	3·02 „	—	3·02 „
Prezid p.	2·78 „	—	2·78 „
Radojičić	2·64 „	—	2·64 „
Dobrislavić p.	2·42 „	—	2·42 „
Grahovac	2·29 „	—	2·29 „
Matanićev p.	1·62 „	0·66 „	2·28 „
Šumonjić p.	2·22 „	—	2·22 „
Šupice p.	2·16 „	—	2·16 „
Ponorac p.	2·06 „	—	2·06 „
Bunićki p.	1·32 „	0·72 „	2·04 „
Bukovača	1·92 „	—	1·92 „
Pavlić p.	1·83 „	—	1·83 „
Bošt p.	1·83 „	—	1·83 „
Cvitović	1·66 „	—	1·66 „
Pavlešić p.	1·43 „	—	1·43 „
Grubišić p.	1·39 „	—	1·39 „
Sovenica p.	1·32 „	—	1·32 „
Vojnovac p.	1·32 „	—	1·32 „
Pribilić p.	1·03 „	—	1·03 „
Tomašević	0·91 „	—	0·91 „
Poljana p.	0·85 „	—	0·85 „
Pović p.	0·74 „	—	0·74 „
Raketovac p.	0·69 „	—	0·69 „

Digitized by Google

	Pobrđe	*Ravnina*	*Ukupno*
Zagorski p.	0·60 *Km²*	—	0·60 *Km²*
Tovac p.	0·51 „	—	0·51 „
Lađevac p.	0·46 „	—	0·46 „
Kula p.	—	0·36 *Km²*	0·36 „
Kremen p.	0·34 „	—	0·34 „
Vuković p.	0·23 „	—	0·23 „
	746·92 „	119·43 „	866·35 „
4. Na desnoj Uni:			
Zavlaka	3·24 „	—	3·24 „
Sve pontske ponornice	770·30 „	119·43 „	889·73 „
B. Jadransko područje ponornica:			
Lika	327·58 „	376·82 „	704·40 „
Novčica	86·96 „	77·80 „	164·76 „
Otešica	58·17 „	36·64 „	94·81 „
Jadova	34·33 „	55·68 „	90·01 „
ostala Lika	148·12 „	206·70 „	354·82 „
Gacka	182·55 „	74·82 „	257·37 „
Otuča	77·05 „	37·88 „	114·93 „
Ričice	51·17 „	46·69 „	97·86 „
Ličanka	46·37 „	8·80 „	55·17 „
Općenica	24·95 „	10·80 „	35·75 „
Babinpotok	24·04 „	7·26 „	31·30 „
Mutilički p.	15·05 „	2·59 „	17·64 „
Krušnica p.	17·14 „	—	17·14 „
Krbavica brinjska	9·54 „	3·12 „	12·66 „
Letinac p.	10·60 „	1·09 „	11·69 „
Ljutik	7·87 „	0·85 „	8·72 „
Perušićki p.	4·56 „	3·90 „	8·46 „
Mezinovac	3·78 „	3·60 „	7·38 „
Bukovac	6·91 „	—	6·91 „
Oštarski p.	4·42 „	1·27 „	5·69 „
Sokolovac p.	3·18 „	2·16 „	5·34 „
Rudopolje	5·17 „	—	5·17 „
Holjevac	0·98 „	3·60 „	4·58 „
Brinjski p.	3·54 „	0·90 „	4·44 „
Kupjak p.	1·68 „	0·90 „	2·58 „

Digitized by Google

	Pobrđe	*Ravnina*	*Ukupno*
Soviljevac	2·10 *Km*²	—	2·10 *Km*²
Rajačić	2·10 „	—	2·10 „
Makvina	1·90 „	—	1·90 „
Glogovo	1·80 „	—	1·80 „
Jadovno	1·42 „	0·31 *Km*²	1·73 „
Rukavina p. . . .	1·40 „	—	1·40 „
Kvarta I	0·60 „	0·72 „	1·32 „
Kvarta II	—	1·32 „	1·32 „
Kula	1·32 „	—	1·32 „
Filipovićev p. . . .	1·27 „	—	1·27 „
Gregoračev p. . . .	1·08 „	0·18 „	1·26 „
Slatka voda . . .	0·94 „	—	0·94 „
Dolački p.	0·75 „	—	0·75 „
Debeljača	0·55 „	0·12 „	0·67 „
Lučani	0·60 „	—	0·60 „
Sve jadr. ponornice	845·96 „	589·70 „	1435·66 „

K r š:

1. Između Drave i Save	3·02 *Km*²
2. „ Save i Kupe	91·32 „
3. „ Kupe, Une, Zrmanje i mora .	7034·38 „
4. Na desnoj Uni	55·50 „
5. „ lijevoj Zrmanji	68·12 „
Sav Krš . . .	7252·34 „

Srijemska ploča:

Sva ploča (ravnina)	1124·61 „

Poredeći sve ove vrijednosti po područjima dobivamo ovaj prijegled:

Jadransko područje:

	Pobrđe	*Ravnina*	*Ukupno*	
Bujice	571·26 *Km*²	—	571·26 *Km*²	
Rijeke	73·32 „	—	73·32 „	
	644·58 „	—	644·58 „	ili 1·5%

Digitized by Google

Pontsko područje:

	Pobrđe		*Ravnina*		*Ukupno*		
Dunav	699·29	*Km*²	1173·52	*Km*²	1872·81	*Km*²	
Drava	2287·17	„	3750·39	„	6037·56	„	
Sava	13,468·75	„	9773·92	„	23,242·67	„	
Rvenica .	—		7·67	„	7·67	„	
	16.455·21	„	14.705·50	„	31.160·71	„	ili 73·3%

Ponornice (dvojbeno područje):

jadranske	845·96	„	589·70	„	1435·66	„	
pontske	770·30	„	119·43	„	899·73	„	
	1616·26	„	709·13	„	2325·39	„	ili 5·5%

Nepoznato područje:

Krš	—		—		7252·34	„	
Srijemska ploča	—		1124·61	„	1124·61	„	
					8376·95	„	ili 19·7%

Od cijele površine Hrvatske i Slavonije, koja iznosi po ovom mojem mjerenju

42.507·63 *Km*²,

od prilike ¾ (73·3%) pripadaju slivu Crnoga mora, a tek neznatan dio (1·5%) onome Jadranskoga mora. Kad bismo za ponornice mogli ustvrditi, da zaista pripadaju ovomu ili onomu slivu — kako je u popisu naznačeno —, onda bi obuhvatalo

jadransko područje 2.077·25 *Km*² ili 4·9%
pontsko područje 32.053·56 „ ili 75·4%

od cijele površine Hrvatske i Slavonije. Na svaki bi nam način 19·7% (8376·82 *Km*²) bilo ipak posve nepoznato, naime područje Krša i Srijemske ploče.

Digitized by Google

Povijest razvoja inflorescencijâ kod Dipsakacejâ.

(Sa 3 table.)

Primljeno u sjednici matematičko-prirodoslovnoga razreda Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti od dne 7. svibnja 1904.

Napisao dr. Stjepan Gjurašin.

Prirodna porodica *Dipsacaceae* sastoji se od monotipskoga roda *Triplostegia*, roda *Morina* i poviše rodova, koji su megju sobom veoma srodni i za koje je De Candolle odabrao naziv *Scabioseae* po jednom najvećem rodu megju njima *Scabiosa*. Bentham i Hooker[1] načiniše od ove grupe veliki rod *Scabiosa*, iz kojega su izlučili samo rodove *Dipsacus* i *Cephalaria*, dok je Baillon[2] k njemu priključio još i rod *Cephalaria*, tako da se po njemu sastojala porodica *Dipsakacejâ* samo od rodova *Triplostegia*, *Morina*, *Dipsacus* i od roda *Scabiosa*, koji je od ona sva tri kud i kamo veći. Ali ovo se spajanje rodova pokazalo vrlo nezgodno, jer ako čemo po Baillonovu načinu s rodom *Scabiosa* spojiti rod *Cephalaria*, onda bismo morali to isto učiniti i s rodom *Dipsacus*, jer se neke vrste ovoga roda ništa više ne razlikuju od mnogih *Cephalarija*, nego što se razlikuju pojedine vrste raširenoga roda *Scabiosa* megju sobom. S toga se čini mnogo zgodnije dijeljenje grupe *Scabiosejâ* u više rodova, kao što je učinio n. p. Boissier[3] i u novije doba F. Höck[4]. Po njima se grupa *Scabiosejâ* raspada u rodove: *Cephalaria*, *Dipsacus*, *Succisa*, *Knautia*, *Pterocephalus*, *Callistemma*, *Scabiosa* i *Pycnocomon*. Ovima je svima rodovima

[1] Bentham-Hooker: Genera Plantarum II.
[2] Baillon: Histoire des plantes VII.
[3] Boissier: Flora orientalis III.
[4] Engler-Prantl: Natürliche Pflanzenfamilien IV. 4. — F. Höck: Dipsacaceae. Štampano 1891.

Digitized by Google

zajedničko, što imadu inflorescencije[1] glavice najobičnije kuglasta, rjegje valjkasta oblika. Od ovih se razlikuje *Morina*, što imade inflorescencije u pazušcima listova smještene u obliku t. z. nepravih prsljena, kakvi po prilici dolaze i u porodice *Labiata*. Napokon monotipski rod *Triplostegia* imade dibrahije ili dihazije, kao i srodni rod *Valerianacejâ*.

Ova je porodica s *Dipsakacejama* tako srodna, te su Adanson (Familles des plantes) i A. L. de Jussieu (Genera plantarum) obje držali za jedno, i tek je g. 1823. Coulter za rodove *Dipsacus* i *Scabiosa* načinio posebnu porodicu nazvavši je po prvom rodu. Megju objema je porodicama najočitija razlika t. z. izvanja čaška ili *caliculus*, koju *Dipsakaceje* imaju, dok je *Valerianaceje* nemaju. Nadalje je kod posljednje porodice ginecej od tri plodnička lista sagragjen i trogradan, ali je od sva tri pretinca u njemu samo jedan plodan. Kod vrste *Valeriana dioica* L. nalaze se pače kadšto pestići sa pet njuški[2], što pokazuje, da može biti gragjen i od pet plodničkih listova. *Dipsakaceje* naprotiv imadu ginecej jednogradan s jednim sjemenim zametkom i obično samo s jednom njuškom. U zametku je ovdje ginecej sastavljen od dva medijana plodnička lista, ali se od oba gornji doskora utaji, kako je pokazao Payer[3]. Inflorescencije su kod *Valerianacejâ* metličaste s brahijalnim postranim ograncima, dok kod *Dipsakacejâ* nalazimo to samo u malo slučaja, a ponajviše botritske glavice. Uzmemo li spomenuta morfološka obilježja, morat ćemo od obje megjusobno vrlo srodne porodice uzeti *Valerianaceje* za primitivniji tip, tip bliži hipotetskomu praobliku, iz kojega su nastale i jedna i druga porodica. Kod hipotetskoga je praoblika bio ginecej od tri, a možda i od pet plodničkih listova sastavljen, te su sva tri (ili pet njih) bili fertilni. Od današnjih descendenata ovoga praoblika imadu *Valerianaceje* još i danas tri plodnička lista, ali je samo jedan fertilan, dok drugi descendenti samo u zametku imadu dva karpida, ali i od ovih se brzo utaji samo jedan. Kako ćemo dalje čuti, Čelakovský je dokazao, da se imadu thyrse ili metličaste inflo-

[1] Ja ovdje upotrebljavam ovaj naziv, jer mi se nazivi, što se u hrvatskoj botaničkoj literaturi upotrebljavaju, ne čine ni najmanje zgodni. Riječ „cvat“ znači isto, što i „cvijet“, a „ucvast“ je valjada načinjeno prema glagolu „ucvasti“, od kojega bi imenica bila „ucvat“, a ne „ucvast“.

[2] Höck, l. c. str. 174.

[3] Payer: Traité d'organogénie e dela comparéfleur. 1857.

Digitized by Google

rescencije držati za prvotnije od botritskih, te se ove dadu lako izvoditi iz onih. Dakle i u svojim su inflorescencijama *Valerianaceje* prvotniji oblici od velike većine *Dipsakacejâ*. I onaj je spomenuti praoblik morao imati metličaste inflorescencije, jer i današnji njegovi descendenti imadu ili takove inflorescencije ili opet onakove, koje se iz ovih lako dadu izvoditi. Kako metličaste inflorescencije *Valerianacejâ* izlaze u pobočnim ograncima u dihazije, mislio je F. Höck[1], da bi se možda mogle i glavičaste inflorescencije *Scabiosejâ* svesti bar na dihotomiju, ako se već poradi nedostatka središnjega cvijeta ne mogu svesti na dihazije, kakove dihazije imade n. pr. *Succisa* u daljem razgranjivanju. To se pitanje dade riješiti jedino ontogenetski, a kako u tom pogledu nije još ništa učinjeno, to sam odlučio sâm da istražim ontogeniju inflorescencija *Dipsakacejâ*. Osim *Scabiosejâ* uzeo sam i inflorescencije od *Morine* u ispitivanje, kod koje ima takogjer više neriješenih pitanja. Materijal sam za istraživanje dobio većinom iz našega botaničkoga vrta, a neke sam vrste sabrao u bližoj okolici zagrebačkoj.

Razvoj je glavica od *Scabiosejâ* u glavnom kod svih vrsta i rodova, što sam ih istraživao, jednak. Svaka glavica ima dva transversalna predlistića, iz čijih pazušaca slijedi dalje razgranjivanje. Ako mladoj glavici otkinemo predlistiće, naći ćemo u njihova pazušca primordije sekundanih glavica. Što su primane glavice mlagje, to su mlagje i sekundane, što izbijaju iz pazušaca njezinih predlistića. Sasvim se mlad primordij vidi kao polovica kugle (tabla I. sl. 11., in_1). Domala se protegne transversalno prema svome zalisku, koji je ujedno predlistić primane glavice, tako da primordij, koji je u početku imao na popriječnom prorezu okrugao oblik, dobije sada eliptičan oblik. Na ovako se protegnutom primordiju pojave lijevo i desno zaresci, kojima se odijele oba njegova predlistića. Središnji se preostali dio zaokruži i predočuje samu mladu glavicu (tabla I. sl. 1., 2., 3., i slike 5., 6. i 13. kod *pr.* i *in*). Kako ona dalje raste, tako isto rastu s njom i njezini predlistići. Podine se njihove sa strane raširuju, dok se od oba predlistića u medijani ne sastanu čineći oko primordija niski tok (tab. I. sl. 4.). Oba predlistića omotavaju posve mladu glavicu, i hoćemo li je motriti, moramo ih iglama odmaknuti. Dalja je promjena, što se na obodu primordija počinju pojavljivati listovi, koji

[1] l. c. str. 184.

Digitized by Google

će sačinjavati ovojak glavice. Prvi listovi ovojka postaju u medijani sprijeda i straga (tab. I. sl. 10. kod *o*., sl. 11. lijevo i desno). Kod vrste *Knautia silvatica* (L) Duby pojavljuje se po jedan list ovojka sprijeda i straga (tab. I. sl. 11. lijevo i desno), a n. pr. kod vrste *Dipsacus Fullonum* Mill. po dva takova lista (tab. I. sl. 7.). Iza ovih slijede ostali listovi ovojka, koji što su mlagji, to su manji, a takovi maleni ostaju i u gotovom stadiju. Iza listova ovojka slijede odmah zalisci sa cvjetnim primordijima u svojim pazušcima, a u vrsta, koje nemaju zalistaka, sami cvjetni primordiji. *Knautia silvatica* (L.) Duby n. pr. imade cvjetove bez zalistaka, zato ovdje odmah iza listova ovojka slijede cvjetni primordiji (tab. I. sl. 12.). Kod drugih vrsta, kod kojih imadu cvjetovi zaliske ili, kako ih obično u floristici nazivaju, pljeve, slijede ove, a iz njihovih pazušaca niču odmah cvjetni primordiji (tab. I. sl. 8., 13.).

Kako se pojave prvi cvjetni primordiji, počne inflorescencija u duljinu rasti, tako da kod rodova *Dipsacus* i *Cephalaria* duljina inflorescencije znatno nadmašuje širinu njezinu (tab. I. sl. 5., 6., 13.), dok n. pr. kod roda *Knautia* ostaje oboje po prilici jednako (tab. I. sl. 12.). Pošto je iznad ovojka glavice nastao prvi pršljen primordija, slijedi za njim drugi i tako dalje redomice. Dok je već donji dio inflorescencije pokriven cvjetnim primordijima, to je gornji njezin dio još bez njih, ravan i posve gladak. Cvjetni su primordiji sve manji, što su bliži vrhu inflorescencije, i obrnuto sve veći, što su bliži njezinoj bazi, i ni u jednom slučaju nijesam opazio, da bi n. pr. u sredini visine inflorescencije bili veći, dakle stariji primodiji, a odavle prema vrhu i bazi sve mlagji. Spominjem to naročito zato, jer je poznato, da se kod antheze kod roda *Dipsacus* rascvjetavaju prvi cvjetovi u sredini visine glavice, a odavle da ide dalje rascvjetavanje istodobno akropetalno i bazipetalno. Po tom bismo dakako mogli pomišljati, da su cvjetovi u sredini visine glavice najstariji, da su se prvi pojavili, a za njima ostali akropetalnim i bazipetalnim redom. Ali budući da nas povijest razvoja inflorescencija od roda *Dipsacus* uči, da cvjetovi na njemu nastaju samo akropetalnim redom, moramo uzeti, da je onomu neobičnom načinu rascvjetavanja drugi neki uzrok. Moguće je, da su tomu uzrok listovi ovojka, koji pritiskuju na bazalne primordije i priječe ih u njihovu rastu, tako da zaostaju za onima, što se nalaze u sredini inflorescencije. Ali protiv toga govori to, što se kod nekih *Scabiosâ* n. pr. *Scabiosa atropurpurea* rascvjetavaju u isto vrijeme

Digitized by Google

s cvjetovima u sredini visine inflorescencije cvjetovi na podini njezinoj, koji bi dakako imali biti najjače pritiskivani od listova ovojka.

Ontogenija nas dakle uči, da nastaju cvjetovi na glavicama *Scabiosejâ* akropetalnim redom. Kakovoj dihotomiji, kojom bi po nagagjanju Höckovu imale ove inflorescencije nastajati, nema ovdje ni traga. Glavice su dakle *Scabiosejâ* svojim i postanjem i razvojem cvjetova na njima prave botritske inflorescencije.

Zanimljivija je inflorescencija roda *Morina*. Već je god. 1851. Wydler[1] izrekao mnijenje, da je parcijalna inflorescencija od vrste *Morina longifolia* dvostruka kovrčica (Doppelwickel). „Prva je os neograničena. Cvjetovi na drugim osima. Cvjetne su grane dvostruke kovrčice i postaju iz pazušaca gornjih listova, koji postaju prema gore postupno sve manji te stoje u troje u pršljenima i tvore ovršnu metlicu sa cvjetovima, koji su zbijeni poput klasa i koji se uzlazno razvijaju“[2].

Eichler[3] dvoji o ovom Wydlerovu tumačenju. „Ovo mi je tumačenje s toga dvojbeno, što ne samo pojedini cvjetovi nemaju zalistaka (Deckblätter), nego imadu i izvanju čašku! Jer ako je ova, kako je opće, a i naše mišljenje, načinjena od sraslih predlistića, moralo bi slijediti kovrčičasto razgranjivanje iz njezina dna. Megjutim imadu cvjetovi sasvim slično poregjanje, kao kod nedvojbenih dvostrukih kovrčica od *Labiatâ*. Priznajem, da mi je morfološko tumačenje ove inflorescencije još nejasno; mogli bismo doduše pomisliti, da imademo tu, kao i kod drugih *Dipsaceja*, posao s neograničenim oblikom inflorescencije, s ponovno poraslim glavicama, kojih pojedini cvjetovi nemaju zalistaka (Bracteen), a uz to su megjusobnim tlakom u siksak poregjani; ali je ipak takav prihvat, ako i ne bi bio nemoguć, uvijek sumnjiv. Megjutim imadu cvjetovi *Morine* ponešto stapke (naziv glavice ne bi bio zato posve točan), nutarnji najdulje, izvanji postupno kraće, dok su oni na periferiji sjedeći; ravnine simetrije svih cvjetova stoje uz to prema vretenu općene inflorescencije medijano, kako i pristaje pravim glavicama“.

F. Höck[4] se slaže u tumačenju izvanje čaške u glavnom

[1] Wydler: Ueber die symmetrische Verzweigungsweise dichotomer Inflorescenzen. Flora 1851.

[2] l. c. str. 386.

[3] Eichler: Blüthendiagramme I., str. 279.

[4] U citovanom djelu str. 184.

Digitized by Google

s Eichlerom držeći, da je postala srastenjem predlistića. Naprotiv drži Höck, da se mogu inflorescencije od *Morine* svesti na dihazije: „čemu govore u prilog odnošaji cvjetnih stapki; najnutarnjije su najdulje, dok su one, što više izvana sjede, sve kraće. I odnošaji brojeva, čini se, da se slažu s tim tumačenjem, koliko je piscu materijal dostajao".

L. Čelakovský[1] je kod vrstâ *Morina persica* L. i *M. turcica* Deg. et Hal. na aksilarnim inflorescencijama često našao po jedan ili po dva predlistića (Vorblätter), koji su posve nalikovali zalisku. „Ovim je opažanjima potpuno dokazano, da je cjelokupna inflorescencija od *Morine* botrys, koji tvore brahiji, i to dvostruke kovrčice (Doppelwickeln) ili djelomice u najjednostavnijem slučaju jednostavni dihaziji arhibrahiji. Predlistići su se cvjetnih stapki doduše pravilno zatajali, ali mogu biti razvijeni izuzetno bar na primanoj osi kao listovi slični listovima na stabljici. Tim je odlučeno, za sada bar za *Morinu*, da ne stvaraju izvanju čašku predlistići, već visolistovi, koji više stoje"[2].

Protiv nagagjanja Eichlerova, da bismo mogli inflorescenciju *Morine* držati za glavicu, kao i kod drugih *Dipsakaceja*, koja je ponovno prorasla, navodi Čelakovský[3], što takovo prorastenje dolazi inače samo kao abnormalnost nastala pomutnjama, koje duboko zasijecaju u normalno rastenje, ali i tada se tako često ne ponavlja. Nigdje ne nalazimo takova primjera, kakav bi imao ovdje biti, da bi ista os nosila najprije obične listove, za tim cvjetove bez zalistaka, onda bi se opet protegnula i istim redom stvarala listove, cvjetove i t. d.

Od roda sam *Morina* mogao istraživati ontogeniju inflorescencija i cvjetova kod dvije vrste: *Morina longifolia* Wall. i *M. kokanica* Pregel et Herd. Materijal sam dobio iz botaničkoga vrta našega sveučilišta, gdje se obje vrste goje u familiji *Dipsakacejâ*. Stabljika imade listove u pršljenima poregjane. Listovi su se jednoga pršljena svojim podinama srasli u dugačak tok. Pojedini su pršljeni dvočlani, tročlani ili četveročlani. Obično se u opisima ovoga roda navode

[1] L. Čelakovský: Ueber den Blüthenstand von Morina und den Hüllkelch (Auszenkelch) der Dipsacaceen. Engler: Botanische Jahrbücher für Systematik, Pflanzengeschichte und Pflanzengeographie. Band XVIII. 1893.

[2] l. c. str. 398.

[3] l. c. str. 395—6.

Digitized by Google

tročlani pršljeni, ali pravo spominje Čelakovský[1], da su najobičniji tročlani, ali da dolaze i dvočlani, četveročlani, pače i peteročlani — kojega posljednjega slučaja nijesam nijedanput opazio kod spomenutih vrsta —, a dvočlane da je nalazio na vrlo slabim primjercima. Čelakovský misli, da se imadu dvočlani pršljeni držati za prvobitne, a „stezanjem dvaju ovakovih pršljena nastali su četveročlani". Budući da nalazimo kod svih drugih *Dipsakaceja* a i kod srodnih *Valerianaceja* samo dvočlane pršljene, svakako je vrlo vjerojatno, da će biti oni prvobitniji od višečlanih pršljena. Ali je drugo pitanje, da li su od njih stezanjem nastali četveročlani. Još možemo nekako pomišljati, da bi četveročlani pršljeni stezanjem dvaju mogli nastati dvočlani, ali kako bi takovim stezanjem imali nastati tročlani ili peteročlani, o tom ni sam Čelakovský ne kaže ništa. Očito je, da „stezanjem" dvaju pa makar i više dvočlanih pršljena ne može nastati tročlan ili peteročlan. Jer uzmemo li, da bi se stegnula dva dvočlana pršljena, od kojih bi imao nastati jedan tročlan, to bi svakako ostao još jedan list. Taj bi ostali list morao za tim doći u slijedeći viši dvočlani pršljen, da pomogne stvoriti nov tročlan pršljen. Po tom bi nagagjanju morali članovi istoga pršljena ići jednom prema gore, a za tim prema dolje, ili budući da oni to ne mogu, morao bi isti komad stabljike na vrlo čudan način rasti, što se nikako ne slaže s iskustvom. Motrimo li vršak stabljike od *Morine*, koji raste u duljinu, možemo se vrlo lako uvjeriti o tom, da članovi jednoga pršljena nastaju simultano i da kakomu naknadnomu pomicanju ili „stezanju" nema ni traga.

Vrlo sam lijep primjer za to, kako postaju pršljeni, motrio kod vrste *Morina kokanica*, koji imamo naslikan na tabli II. na slici 14. U tom je slučaju imala stabljika odozdo listove u dvočlanim pršljenima (dekusirano poregjanje) sve do vrha, na kom sam uhvatio baš momenat, kad se na njemu počeo stvarati tročlani pršljen. Više sam puta motrio, kako je stabljika odozdo imala dvočlane pršljene, gore tročlane ili četveročlane, što nijesam našao spomenuto u literaturi. I u našem je slučaju slijedio iza dvočlanoga pršljena tročlani. Na jednom se kraju transversale dvočlanoga pršljena (f_1) smjestio jedan, a na drugom kraju dva lisna primordija tročlanoga pršljena (f_2), koji je baš postajao. Kad bi iza dvočlanoga pršljena slijedio četveročlani, nema sumnje, da bi se onda

[1] l. c. str. 397.

Digitized by Google

na oba kraja transversale dvočlanoga pršljena smjestila po dva lista četveročlanoga, kako sam u istinu nekoliko puta motrio, ali samo u već gotovim stadijima. To isto nalazimo i u cvjetovima, gdje slijede heteromerni cikli jedan za drugim. Dobro je poznat slučaj, kakav nalazimo u cvijetu *Cruciferâ*. Njihov cvijet imade čašku od dva dimerna ciklа, koji alterniraju, i vjenčić od jednoga tetramernoga pršljena, koji se s nutarnjim pršljenom čaške dijagonalno križa[1]. Ovakovo se priključenje dade rastumačiti jednostavnim zakonom, što ga je već Hofmeister[2] postavio, da novi organi nastaju na primordiju na onom mjestu, gdje imade za njih najviše mjesta. Ako iza dvočlanoga pršljena slijedi tročlani ili četveročlani, to će izmegju postranih rubova na listovima dvočlanoga pršljena naći lisni primordiji novoga pršljena najviše mjesta, i za to će se tu i stvoriti, kako smo vidjeli. Ono tumačenje Čelakovskoga, kako postaju višečlani pršljeni od dvočlanih, može se uzeti samo kao u slici, ali nam ontogenija ne pokazuje ništa o kakom stezanju. Vidjeli smo, da iza dvočlanoga pršljena slijedi tročlani tako, da se u njemu listovi pojave svi simultano. Zašto imade *Morina* osim dvočlanih još i višečlanih pršljena, drugo je pitanje, na koje ne znamo odgovoriti. Mi se moramo zadovoljiti tom činjenicom, da se broj listova u jednom pršljenu kod *Morine* može povećati, mjesto prvobitno dvočlanih pršljena mogu doći tročlani, četveročlani ili po opažanju Čelakovskoga pače i peteročlani.

Vrh se stabljike od *Morine* okončava s inflorescencijom. Ova nosi na sebi listove — zaliske parcijalnih inflorescencija, koji su takogjer poregjani u pršljene. U vrsta, koje sam istraživao, naime *Morina longifolia* i *M. kokanica*, našao sam u većini slučajeva ove pršljene tročlane, rijetko četveročlane, dok je Čelakovský za vrste *Morina persica* i *M. turcica* našao, da varira broj članova izmegju dva i pet, kao i u vegetativnim dijelovima. Ovi su listovi mnogo manji i jednostavniji od vegetativnih: dok imadu ovi plojku dosta duboko iscijepanu, sa trnovitim krpicama, to je u zalistaka inflorescencije rub samo slabo pilast sa slabim trnićima. Svaki ovakav zalistak nosi u pazušcu svom po jednu parcijalnu inflorescenciju. Ove parcijalne inflorescencije iz pasušaca najdonjih zalistaka nose na sebi listiće, kojih gornje parcijalne inflorescencije

[1] Eichler: Blüthendiagramme I., 12. i II., 200.
[2] Hofmeister: Allgemeine Morphologie, § 11.

Digitized by Google

nemaju. Čelakovský je našao kod vrstâ *Morina persica* i *M. turcica* u najboljem slučaju samo dva predlistića, dok sam ja kod vrstâ *Morina longifolia* i *M. kokanica* našao i do četiri takova listića. Od njih su dva stajala u transversali lijevo i desno od inflorescencije (pr_1, tabla II. sl. 8. i 10.; tabl. III., sl. 1., 2., 3., 5. i 6.), dok su druga dva bila u medijani sprijeda i straga (pr_2, tab. II. sl. 8., 10., 12. i 13.; tabl. III. sl. 1., 2., 3., 4., 5., 6. i 10.). Na tabli III. na slici 6. imamo parcijalnu inflorescenciju od vrste *Morina longifolia* iz jednoga najdonjega zaliska skupne inflorescencije. Ovdje imademo četiri listića: dva transversalna (pr_1) i dva medijana (pr_2, stražnji se ne vidi, jer ga pokriva prednji), koji su dosta veliki i jednaki. Slično vidimo i na slici 1. i 2. na tabli III., samo što su ovdje transversalni listići nešto manji od medijanih. Još je veća razlika izmegju listića na slici 8. na tabli II. od vrste *Morina kokanica*, gdje su transversalni do četiri puta manji od medijanih. Na slici 3. i 5. na tabli III. razvijen je od transversalnih listića samo onaj na lijevoj strani, dok je onaj na desnoj posve iščeznuo. I ovdje je jedini transversalni listić mnogo manji od oba medijana. Valja mi spomenuti, da sam sva četiri listića našao razvijena samo na najdonjim parcijalnim inflorescencijama, dok sam na nešto višim našao slučaj, kakav sam na zadnje opisao. Idemo li još više za jedan prsljen, naći ćemo inflorescencije, kakove su naslikane na tabli II. sl. 10. i 12. i na tabli III. sl. 10., gdje su transversalni listići posve iščezli, a ostali samo medijani (pr_2). Dalje više napokon nemaju parcijalne inflorescencije ni medijanih listića (tabla II. slike 1. do 7.).

Promotrimo sada inflorescencije, u kojih su razvijena oba medijana i transversalna listića. Svaka se sastoji od parcijalnih inflorescencija. Na tabli III. na slici 6. imademo čitavu takovu inflorescenciju naslikanu, a na slici 8. lijevi, na sl. 9. desni i na sl. 7. srednji njezin dio. U srednjem dijelu (sl. 7.) imademo dibrahij, koji lijevo i desno izlazi u kovrčicu, ili sve sačinjava dvostruku kovrčicu sa skraćenim osima. Na lijevoj je strani dospjelo razgranjivanje do petoga stepena, a na desnoj samo do trećega. Postrane su inflorescencije (sl. 8. i 9.) jednostavne kovrčice s razgranjivanjem do drugoga stepena. Slično nalazimo i na tabli II. sl. 8. Središnji dio ove inflorescencije vidimo na slici 9., kako se vidi odozgo, te je i ovo dvostruka kovrčica s razgranjivanjem do trećega stepena na obje strane. Postrane su parcijalne inflorescencije takogjer jednostavne kovrčice (sl. 8.). Slično je i na sl. 2. na

Digitized by Google

tabli III. Središnja se parcijalna inflorescencija istom nalazi u stadiju arhibrahija, dok je desna parcijalna inflorescencija kovrčića s tri primordija cvjetna. Sl. 1. na tabli III. razlikuje se toliko, što ovdje lijeva parcijalna inflorescencija nije razvijena, već samo desna i središnja.

Na tabli III. sl. 3. i 5. naslikane su inflorescencije, kojima je od transversalnih listića razvijen samo lijevi, a desnoga nema. U jednoj je i drugoj desna parcijalna inflorescencija jače razvijena od središnje i lijeve. Na slici su 3. obje postrane inflorescencije kovrčica, a središnja dibrahij (sl. 4.), dok je na slici 5. desna postrana inflorescencija dibrahij. Ovomu je dibrahiju krak okrenut k srednjoj strani glavne osi jače razvijen, a razgranjivanje ide ovdje samo do petoga stepena, dok na stražnjem ide razgranjivanje samo do trećega stepena. Na sličan su način gragjene i one parcijalne inflorescencije, kod kojih obadvaju transversalnih listića nema (tab. II. sl. 10. i k tome središnja inflorescencija sl. 11.; sl. 12. sa središnjom inflorescencijom u 13.; tab. III. sl. 10. sa središnjom inflorescencijom u 11.).

Ovakove se parcijalne inflorescencije s listićima nalaze samo u najdonjim, obično u najdonja dva prašljena. Dalje više nalazimo parcijalne inflorescencije bez traga kakvih listića. One su jednovite, dibrahiji, koji izlaze ili u monobrahije ili pak u dibrahije. Postanje sam ovih inflorescencija mogao sasvim točno motriti. Na tabli II. na slici 1. imademo naslikan vrh ukupne inflorescencije od vrste *Morina kokanica*, a spomenuti mi je, da je takav upravo i od vrste *M. longifolia*. U našem su slučaju listovi *(l)* poregjani po tri u prašljenima, koji alterniraju. U pazušcu se listova drugoga prašljena od vrha *(v)* vide primordiji inflorescencija *(in)* u obliku transversalno rastegnutih nabreklina. Na takovoj se nabreklini pojave zatim tri uzvisine: jedna središnja i dvije pobočne, kako se vidi u pazušcu jednoga lista iz trećega prašljena od vrha *(fl_2 fl_1 fl_2)*. Ovaj stadij imademo naslikan na slici 2., kako se vidi sprijeda. Središnja je uzvisina *(fl_1)* primordij primanoga cvijeta, dok su manje dvije primordiji sekundanih sačinjavajući sve skupa u tom stadiju jedan arhibrahij. Za ovim stadijem slijedi takav, u kakom se pojave i tercijani cvjetovi (sl. 3. fl_3). Dok su primordiji sekundanih cvjetova lijevo i desno od primanoga, to su primordiji terci janoga ispred ovih, kakav položaj imadu cvjetovi monobrahija. Sličan je, tek nešto stariji, stadij naslikan na slici 4. Osobito je ovdje, da desni tercijani primordij pokazuje lijevo kvaterne pri-

Digitized by Google

mordije. Ovdje dakle desni monobrahij prelazi u četvrtom stepenu u dibrahij. Na slici je 6. nešto stariji stadij. Na lijevoj strani prelazi inflorescencija u kovrčicu s razgranjivanjem do četvrtoga stepena, dok na desnoj strani imade sekundani cvijet *(fl_2)* sprijeda i straga po jedan tercijani primordij t. j. ovaj sekundani s tercijanim sačinjava dibrahij. Krakovi dibrahija prelaze zatim u monobrahije *(fl_3)*. Slično vidimo i na slici 5., samo što ovdje na desnoj strani sprijeda sekundanoga cvijeta imademo dibrahij, tako da ovdje dibrahijalno razgranjivanje ide do trećega stupnja. Napokon u slučaju, što ga imademo na slici 7., nalazimo na obje strane primanoga cvijeta dibrahije *(fl_3 fl_2 fl_3)*, a istom se na njihovim sekundanim cvjetovima nastavlja dalje monobrahijalno razgranjivanje.

Kako ćemo dakle tumačiti inflorescenciju kod *Morine?* Prije nego što ćemo odgovoriti na ovo pitanje, ne će biti zgorega, ako se upoznamo sa današnjim stanjem nauke o inflorescencijama. Prvi je Röper pokušao znanstveno razrediti inflorescencije (Linnaea 1826.), dok je naziv „inflorescencija" već g. 1751. Linné uveo u botaniku. Röper je razlikovao inflorescencije neograničene ili centripetalne i ograničene ili centrifugalne. Kod prvih je rastenje glavne osi neograničeno, a u drugih se glavna os okončava s cvijetom, čime je dakako dalji njezin rast ograničen. Dalja bi razlika megju obje vrste imala biti u razvoju cvjetova: u prvih se rascvjetavaju cvjetovi centripetalnim redom, n. pr. u grozda odozdo prema vrhu, a u drugih centrifugalnim redom, n. pr. u paštica od središta prema obodu. Ovu su Röperovu razdiobu poprimili savremenici, ona se pače u glavnom održala sve do danas kod većine morfologa, kao što su Payer, Eichler, Pax i t. d. Mjesto naziva Röperovih počeli su upotrebljavati nazive „cimozne inflorescencije" za ograničene ili centrifugalne po „cymi" (pašticu), koja pripada megju njih, i „racemozne" ili „botritske" za neograničene ili centripetalne po „racemusu" ili „botrysu", koji pripada megju ove.

Karakteristika, što ju je dao Röper za jednu i za drugu vrstu inflorescencija, ne zadovoljava u svim slučajevima. Racemozne ili botritske inflorescencije imale bi glavnu os neograničenu, bez krajnjega cvijeta. Ali ima ipak racemoznih inflorescencija s krajnjim cvijetom, kao n. pr. u grozda od roda *Berberis* ili štitca mnogih *Umbellifera;* o opet obrnuto ima cimoznih inflorescencija bez krajnjega cvijeta, kao što su n. pr. dihaziji i arhibrahiji n. pr. u ženskim inflorescencijama od bukve. Ali ni druga karakteristika, naime

Digitized by Google

red rascvjetavanja, ne vrijedi u svim slučajevima. Kako smo vidjeli, glavice su *Scabiosejâ* tipične racemozne ili botritske inflorescencije, pa se ipak kadšto (n. pr. *Dipsacus)* cvjetovi rascvjetavaju djelomice centripetalno, a djelomice centrifugalno, a sličnih bi se primjera dalo još mnogo navesti.

S toga su pokušali Hofmeister[1], Sachs[2] i Pax[3], da nagju drugu razliku megju obje vrste inflorescencija, i mislili su, da je megju njima bitna razlika u tome, da u cimoznih postrane osi nadvisuju rastom i razgranjenjem višu čest glavne osi, što je u racemoznih upravo obrnuto. Ali i ova razlika ne vrijedi svagda, jer n. pr. u dihazija ili dibrahija u *Labiatâ* a i u *Morine* ne prerastaju postrane osi glavnu, a obrnuto u štitca *Umbelliferâ* prerastaju postrane glavnu.

Nije bolje ni s razlikama, što ih navode Payer[4] i Eichler[5], po kojima bi imale cimozne inflorescencije odregjen broj postranih osi, a u racemoznih ili botritskih bio bi neodregjen. Koji je broj odregjen, a koji neodregjen, nije moći naći. Eichler dijeli cimozne inflorescencije na monohazije, dihazije i pleiohazije. U prvih ima glavna os samo jednu postranu os, u drugih dvije, a u trećih tri ili i više. Osobito pleiohaziji čine nepriliku, jer oni mogu imati tri, četiri, pet a valjada i više pobočnih osi, što je svakako isto tako neizvjesno, kao i u racemoznih inflorescencija.

Svi su ovi nedostaci u definiranju inflorescencija prinukale L. Čelakovskoga[6], da pokuša sastaviti novu razdiobu inflorescencija. Kao glavnu pogrješku u razdiobi inflorescencija drži on, što se uzimlju samo dva glavna tipa, dok su u istinu tri, naime uza spomenute još i treći t. z. metličaste inflorescencije ili „thyrse", koje su prvotne, te se od njih dadu izvesti ostala dva tipa. Već je g. 1851. Wydler[7] razdijelio inflorescencije na klasaste, metli-

[1] Hofmeister: Allgemeine Morphologie, § 7., 1868.
[2] Sachs: Lehrbuch der Botanik. 3. Aufl. Str. 510.
[3] Pax: Allgemeine Morphologie. Str. 148. 1890.
[4] Payer: Éléments de Botanique. 1857.
[5] Eichler: Blüthendiagramme I. str. 33. 1875.
[6] L. Čelakovský: Nauka o květenstvich na základě deduktivním (srovnávacím a fylogenetickém). Rozpravy české akademie. Ročník I., třída II., číslo 20. 1892. — Gedanken über eine zeitgemässe Reform der Theorie der Blüthenstände. Engler: Botanische Jahrbücher. Bd. XVI. 1893.
[7] Wydler: Über die symmetrische Verzweigungsweise dichotomer Inflorescenzen. Flora 1851. Str. 290.

Digitized by Google

časte i viličaste, a slično i Al. Braun u Aschersonovoj Flori brandenburškoj[1], ali oni te razdiobe nijesu pobliže obrazložili, tako da je i od savremenika kao i od kasnijih botanika ostala posve neuvažena. Metlicu ili „thyrsus“ držali su i drugi morfolozi za osobit oblik inflorescencija, ali ne kao poseban tip ravnopravan ostalim dvjema tipovima, već kao sastavljen „botrys“. Eichler[2], a po njemu i Engler[3] držali su metlicu ne kao posebnu vrstu botritskih inflorescencija, već za izraz, kojim bi se imao samo općeni rast i oblik inflorescencije označiti.

Kako već spomenusmo, Čelakovský razlikuje tri glavna tipa inflorescencija: 1. metličaste inflorescencije ili „thyrse“; 2. grozdaste ili botritske i 3. viličaste ili brahijalne (cimozne drugih autora, samo što on iz njih izlučuje pleiohazije). Metličaste su inflorescencije najmanje do trećega stupnja razgranjene, običnije do još viših stupnjeva po jednovitom zakonu. Taj se zakon sastoji u tom, što jakost, duljina i stupanj razgranjenja od osnove inflorescencije k vrhu (katkada i obrnuto) biva sve manji. Broj je koordiniranih osi, koje tjeraju iz glavne, prilično jednak broju subordiniranih osi, koje postaju daljim razgranjivanjem iz njih, a najmanje je tri. Ovaj se tip može izraziti i omjerom $\frac{m}{n}$ ili $m : n$, gdje n znači broj koordiniranih osi, koje su potjerale iz glavne, a m najveći stupanj razgranjenja, a u svakom je slučaju m i n veće od dva.

Grozdasti ili botritski tip ima stupanj razgranjenja na minimum sveden, naime na dva: na glavnu os i njezine suosi, kojih broj može biti različno velik, ali svagda veći od dva. Ako se glavna os okončava s cvijetom, imat ćemo formulu za botryse $\frac{2}{n}$, ako ga nema, što je običnije, $\frac{1}{n}$. Sastavljeni se botrysi lako razlikuju od sličnih thyrsa, što kod onih nema onoga polaganoga opadanja u broju razgranjivanja i duljini osi, što baš posljednje karakterizuje.

Viličaste ili brahijske inflorescencije imadu obrnuto od grozdastih broj subordiniranih osi, kao i thyrsi, a koordiniranih reduciran na dva (dibrahij[4]) ili na jedan (monobrahij[4]), i za njih bismo imali

[1] Ascherson: Flora von Brandenburg. 1864.
[2] Eichler: Blüthendiagramme I. 42.
[3] Engler-Prantl: Natürliche Pflanzenfamilien. II. 1. str. 182.
[4] Dibrahij = dihazij, monobrahij = monohazij. Nazive je „dibrahij“ i „monobrahij“ uveo Čelakovský (l. c. str. 56.) s toga, što „dihazij“

Digitized by Google

formulu $\frac{m}{2}$ ili $\frac{m}{1}$. Slučaj, u kom je $m = 2$, nazivlje Čelakovský „arhibrahij“.

Iz metličastoga se tipa dadu lako izvesti ostala dva: grozdasti, ako se postrane osi ne razgranjuju, a viličasti, ako se one dalje razgranjuju, dok njihov broj ne spadne na jedan ili najviše na dva.

Od jednostavnih inflorescencija valja razlikovati sastavljene. U ovih može ići razgranjivanje kroza sve stupnjeve po jednom tipu, i to su tada homotipske ili homotaktične inflorescencije, ili se mogu razgranjivati djelomice po jednom, a djelomice po drugom tipu, a to su heterotipske ili heterotaktične inflorescencije. Megju ovima posljednjima razlikuje Čelakovský thyrsoide, u kojih je općena inflorescencija metlica ili botrys, a posljednji ogranci botritski ili brahijski razgranjeni, i sarmentide, u kojih se općena brahijalna inflorescencija okončava s metličastom ili botritskom parcijalnom inflorescencijom.

Sada se pita, kamo ćemo uvrstiti inflorescencije naših vrsta roda *Morina?* Vidjeli smo, da se kod spomenutih vrsta roda *Morina* opća inflorescencija nalazi na vrhu stabljike. Vrh osi nosi tročlane ili četveročlane prešljene, koji alterniraju. U pazušcu listova ovih prešljena nalazimo parcijalne inflorescencije. U pazušcu se najdonjih listova nalazi os, koja se okončava s cvijetom i nosi na sebi dva para dekusiranih listova: donji se par nalazi u transversali, a gornji u medijani glavne osi. Donja su dva lista predlistići postrane osi, dakle i predlistići terminalnoga cvijeta, a gornji visolistovi. Iz pazušaca jednih i drugih listova slijedi dalje razgranjivanje brahijalno. Valja mi spomenuti, da se brahiji gornjega para ne nalaze u medijani, kako bi morali stajati kao njegove aksilarne izrasli, već u transversali. Mislim, da je to drugotna pojava, kojoj su uzrok prostorne prilike, jer smjerom transversale imadu cvjetni primordiji više prostora za svoj razvoj nego u medijani, gdje ih priječi zalistak, koji pritiskuje na stabljiku. Najdonji se dakle postrani izdanci razgranjuju u početku, kako se razgranjuju metličaste inflorescencije. Dalje više postaju postrane osi jednostavnije, razgranjivanje ne ide tako daleko, kao u donjima. Ujedno listovi postranih ogranaka postupno iščezavaju. Najprije iščezavaju transversalni ili predlistići — najprije samo jedan, a napokon oba, i

dolazi od διχάζω = razdvajam, dijelim, a prema tomu je naziv „monohazij“ bez smisla.

Digitized by Google

ostaju samo oba medijana ili visolistovi sekundanih ogranaka, dok napokon i oni ne iščeznu. Zajedno s ovima nadolaze mjesto postranih ogranaka, koji su bili u početku metličasto razgranjeni, jednostavni dibrahiji. Iz svega ovoga slijedi, da je općena inflorescencija od vrstâ *Morina longifolia* i *M. kokanica* gragjena po tipu metlice, kojoj u višim stupnjevima prelazi razgranjivanje u brahijalno. To je dakle metlica s brahijima ili, kako takovu heterotipsku inflorescenciju Čelakovský u kratko nazivlje, *brachiothyrsus*. Wydler[1] je već pred pô vijeka za vrstu *Morina longifolia* ustvrdio, da joj je općena inflorescencija metlica, čega nijesu poslije drugi botanici spominjali, a ja sam sada posve potvrdio.

Valja mi sada nešto spomenuti o položaju pojedinih cvjetova prema glavnoj osi inflorescencije. Eichler[2] kaže, da „ravnine simetrije svih cvjetova stoje prema vretenu općenite inflorescencije medijano, kako bi za prave glavice pristajalo". Ali u istinu nije tako. Primani cvijet brahija u istinu stoji u medijani prema vretenu općenite inflorescencije, kako i mora biti. Ali simetrijske ravnine sekundanih cvjetova (tabla III. sl. 7., 8. i 9.) čine kut sa simetrijskom ravninom primanoga cvijeta, koji je manji od pravoga. Tako je n. pr. simetrija cvijeta sl. 9. tab. III., koji je ovdje više uvećano naslikan iz sl. 6., gotovo za 90° zakrenuta prema simetrali primanoga cvijeta sl. 7. Obično su simetrije sekundanih cvjetova prema primanim za mnogo manji kut zaokrenute. Tako je isto našao Goebel[3] za cvjetove kod *Labiatâ*, koji su smješteni u nedvojbenim kovrčicama. Simetrijske ravnine sekundanih i tercianih cvjetova ne zatvoraju n. pr. kod vrste *Lamium album* pravi kut, već po prilici 45°. Tvrdnja dakle Eichlerova, da su ravnine simetrijske pojedinih cvjetova kod *Morine* paralelne, ne stoji, već se one sijeku, doduše ne pod pravim kutom, kako bi teorija zahtijevala, već pod kutom nešto manjim od 90°, što svakako govori za brahijalnu narav njihovih parcijalnih inflorescencija.

U uskom savezu s pitanjem o inflorescencijama stoji kod *Dipsakacejâ* pitanje o morfološkoj vrijednosti t. z. izvanje čaške, koja čini jedno od najbitnijih obilježja ove biljne porodice. Većina morfologa drži, da je izvanja čaška nastala srastenjem predlistića. F.

[1] Wydler: l. c. str. 386. Flora 1851.
[2] Eichler: Blüthendiagrame. I. str. 279.
[3] Goebel: Morphologische und biologische Bemerkungen. 14. Zur Entwicklungsgeschichte des Boragoids. Flora 1902., str. 260.

Digitized by Google

Buchenau[1] je najprije na temelju povijesti razvoja došao na misao, da je izvanja čaška prava čaška, a nutarnja „nestalni, akcesorski organ". Ali je kasnije odlučno zabacio to svoje mnijenje. „Ja sada držim, da je izvanja čaška *Dipsacejâ* sastavljena od predlistića cvjetnih (ili od samo dva pobočna ili od četiri, koji padaju naprijed, natrag i postrance), a da naprotiv imamo držati nutarnju čašku ili pappus za pravu čašku, koja je samo na osobit način modificirana".[2] Eichler[3] je takogjer držao, da je izvanja čaška *Dipsakacejâ* sastavljena od cvjetnih predlistića. Ali se on pita, da li je čine dva ili četiri lista? Za posljednje govori, što su i Buchenau i Payer svagda našli, da postaje od četiri primordija, koji su postavljeni prema svome zalisku transversalno i medijano. Stoga bi se moglo pomišljati, da imademo tu ili jedan četveročlani pršljen ili po analogiji mnogih tetramernih čaški dva dekusirana pršljena. Ali se položaj primordija protivi i jednome i drugom tumačenju. Jer ako bi tu bio jedan četveročlani pršljen, to bi on morao imati dijagonalni položaj prema svom zalisku. Ako bi naprotiv bila tu dva dekusirana pršljena, to bi morala prava čaška, kad je peteročlana, imati drugi položaj, nego što ga u istinu imade. U peteročlane naime čaške (n. pr. roda *Scabiosa)* neparni lap pada prema gore, a kad bi on slijedio iza medijano postavljenih gornjih predlistića, morao bi pasti na lijevu ili desnu stranu transversale. Dakako, kad bi čaška imala takav položaj, morali bi onda i drugi dijelovi cvijeta *Dipsakacejâ* imati drugojačiji položaj, nego što ga u istinu nalazimo. Stoga misli Eichler, da nema druge, već da valja držati za izvanju čašku, da je postala od dva transversalna predlistića. Da svede to mišljenje u sklad sa činjenicom ontogenije, uzimlje on, da su dva medijana primordija komisuralne tvorevine, kakove dolaze n. pr. u čaški *Lythracejâ.* On misli, da može donekle i mehanički rastumačiti, što izvanja čaška dolazi u zametku u obliku četiriju transversalno i medijano položenih primordija. „Cvjetovi *Dipsacejâ*", piše dalje Eichler, „stoje naime u mladosti vrlo gusto stisnuti i slošte se tako četverostrano jedan na drugom, da stoje njihovi bridovi poprečno i medijano; ako uzmemo, da dva prstenasto srasla postrana predlistića nastoje, da se što više razviju, to će biti najviše mjesta u prostorima, što su megju bri-

[1] F. Buchenau: Über Blüthenentwickelung bei den Compositen. Botanische Zeitung. 1872.

[2] l. c. str. 360.

[3] Eichler: Blüthendiagrame I. Str. 279. i 281—2.

Digitized by Google

dovima, dakle kod svakoga cvijeta transversalno i medijano; lisna supstancija biva na neki način od strana u prostore na bridovima stisnuta". Valja nam spomenuti, da nijesmo mogli vidjeti nikakva stiskivanja megju primordijama, jer se (tabla I.) oni u istinu ne dotiču. Dakako, da onda i ovo mehaničko tumačenje Eichlerovo otpada.

H. Baillon[1] drži takogjer izvanju čašku za predlistiće, koji su spojeni u pršljen. Za potvrdu tomu navodi slučaj, gdje je našao u pazušcu zaliska mjesto običajnoga jednoga cvijeta cymu.

F. Höck[2] da bi razjasnio morfološku narav izvanje čaške *Dipsakacejâ*, isporegjuje je s prilikama, što dolaze kod najsrodnije porodice *Valerianacejâ*. Kod većine ovih dolaze pred cvijetom po dva predlistića, kao što obično biva kod dvosupnica. Kod nekih su se rodova predlistići više manje srasli, kao n. pr. kod vrste *Valeriana saliunca* All., nekih vrsta roda *Phyllactis*, kod vrsta *Plectritis major* Bth. i *Pl. samolifolia* Bth. Hook. Kod nekih vrsta roda *Patrinia* n. pr. *Patrinia sibirica* Juss. dolazi povrh običajna dva predlistića na cvjetnoj stapci ispod cvijeta još po jedan do tri listića, koji omotavaju plodnicu, a kasnije plod, pošto su se naknadnim rastom znatno povećali. Höck nazivlje i ove listiće predlistićima (Vorblätter), što svakako ne odgovara pravomu pojmu predlistića. Predlistići su naime prvi listovi, s kojima se ogranak — bio vegetativan, bio sa cvijetom — počinje; kod jednosupnica je većinom samo jedan taki predlistić, a kod dvosupnica su obično dva, upravo onako, kako je kod prvih klica jedna, a kod drugih su dvije supke ili dva prva lista. Stoga se i kod roda *Patrinia* imadu predlistićima držati samo dva donja lista na cvjetnoj stapci, a oni, što stoje više, imadu se držati za visoliste, kakovi nerijetko slijede iza predlistića. Ove prilike kod roda *Patrinia* uzimlje Höck, da rastumači dvostruku izvanju čašku ili „caliculus", što je imade jedini rod *Triplostegia* megju *Dipsakacejama*. Za gornju izvanju čašku misli, da je nastala srastenjem dvaju onakih visolistova, kakve imade *Patrinia*, a donja izvanja čaška da je nastala samo slabim srastenjem predlistića. Ali donja izvanja čaška od *Triplostegije* sastoji se očito od četiri lista, dok *Patrinia* imade samo dva

[1] H. Baillon: Sur l'involucelle des Dipsacées. Bull. mens. d. l. Soc. Linn. de Paris. 1879. Po referatu u Botan. Centralblattu. 1880.

[2] F. Höck: Beiträge zur Morphologie, Gruppirung und geographischen Verbreitung der Valerianaceen. Engler: Botanische Jahrbücher 1882. Str. 19—20.

Digitized by Google

predlistića. Zato misli Höck, da „su načinjeni osim od dva donja predlistića, koji kod *Patrinije* redovno dolaze, kod *Triplostegije* još i od dva sasvim jednako gragjena", a ovaj bi se pridolazak dvaju daljih listova dao lako rastumačiti „jakim nakupljanjem predlistića oko cvijeta, što već dolazi i kod *Patrinije*". Ovdje nam je pripomenuti, da kod *Triplostegije* osim obaju kalikula dolaze još i tipična dva predlistića, pa ako su pravi predlistići, kakve ima *Patrinia*, pripomogli sagraditi izvanji kalikul kod *Triplostegije*, od čega su onda postali predlistići, što ih ima ovaj rod?

I za izvanju čašku ostalih *Dipsakaceja* nagagja Höck, da je na sličan način nastala. „Dade se bar pomisliti, da su dvostruku izvanju čašku imale u početku sve *Dipsakaceje*, ali se donja samo u *Triplostegije* zadržala. Ipak se ne usugjujem o tom odlučiti". Kasnije Höck[1] govori u istom smislu, da mu se ona hipoteza čini najzgodnija i „da je izvanja čaška ostalih *Dipsakaceja* nastala srastenjem dvaju predlistića", u čemu bi se slagao u glavnom s Eichlerom.

O. Penzig[2] je motrio slučaj antolize kod vrste *Scabiosa maritima* L., gdje je najčešće izvanja čaška pokazivala plića ili dublja četiri zareza, koji su kadšto dosezali do njezina dna, tako da se u tom slučaju raspala na četiri listića, koji su imali transversalni i medijani položaj. Iz toga zaključuje Penzig, da je izvanja čaška *Dipsakacejâ* sastavljena od četiri listića. On drži, da ova četiri listića pripadaju dvjema dvočlanim pršljenima, od kojih bi transversalni sačinjavali donji, a medijani gornji pršljen. Tome bi u prilog bilo, što su vrlo često transversalni listići bili veći, te su u pupoljku pokrivali medijane, i što su oni češće stvarali aksijalne osi nego li ovi. Katkada je nedostajalo jednoga para listova, i to svagda transversalnih. Transversalni bi listići po njemu predočivali predlistiće cvjetne stapke, dok bi medijani bili visolistovi. Da bi se uklonio prigovoru Eichlerovu, da se takovu tumačenju protivi priključak listova čaške — jer bi po tom bili prvi i drugi list superponovani medijanim listovima izvanje čaške —, uzimlje Penzig, da je čaška kod *Dipsakacejâ* sagragjena od dva pršljena: jednoga dvočlanoga donjega, kojega bi članovi alternirali s medi-

[1] F. Höck: Dipsacaceae. 1891. Engler-Prantl: Natürliche Pflanzenfamilien IV. 4. Str. 186.

[2] O. Penzig: Studi sopra una virescenza osservata nei fiori della *Scabiosa maritima* L. Atti della Società dei Naturalisti di Modena. Ser. III. vol. 3. 1884.

Digitized by Google

janim listovima izvanje čaške, i jednoga tročlanoga. Tu bi dakle bila čaška gragjena po tipu *Primulacejâ*, koji je tip vrlo rijedak.

Napokon je L. Čelakovský[1] rasvijetlio ovo pitanje sa svih strana. On drži, da je izvanja čaška sastavljena od dva dvočlana pršljena visolistova, od kojih je onaj, kome su listovi u transversali, gornji, a onaj, kome su oni u medijani, donji. Tim dakako otpada tumačenje Penzigovo, po kom bi listovi čaške u *Dipsakacejâ* morali imati rijetki poregjaj, kakav dolazi u *Primulacejâ*, i može se rastumačiti običajnim poregjanjem, gdje dolazi drugi list straga kod glavne osi. Predlistići sami ne ulaze u tvorbu izvanje čaške. Kod *Triplostegije* dolaze pravi predlistići, a iz njihovih pazušaca slijedi dalje razgranjivanje; osim toga dolazi još i dvostruka izvanja čaška. Kod *Morine* dolaze kadšto takogjer predlistići, a osim njih još izvanja čaška, ali običnije njih nema, što biva redovno kod *Scabiosejâ*. Ovu činjenicu navodi Čelakovský[2] s punim pravom kao najočitiji dokaz protiv toga, da bi izvanju čašku tvorili predlistići, jer bi inače ona morala biti različnoga podrijetla u različnih rodova *Dipsakacejâ*. Kako ima *Triplostegia* svagda, a *Morina* katkada predlistiće, to bi kod njih imala izvanja čaška postati od samih visolistova, a kod *Scabiosejâ*, u kojih predlistića tipično nema, od predlistića (Eichler) ili od ovih i visolistova (Penzig). Sasvim je nevjerojatno, da bi ovakva tvorevina, kakva je izvanja čaška *Dipsakacejâ*, bila tako različita podrijetla. Za poregjenje navodi Čelakovský[3] rod *Linnaea* iz srodne porodice *Caprifoliacejâ*. „Cvjetna stapka od roda *Linnaea* nosi dva lateralna predlistića i nad njima dva para visolistova kao involucrum, od kojih prvi par, kako se razumije samo po sebi, stoji medijano, a drugi lateralno povrh predlistića. Za tim slijedi peteročlana čaška s drugim lapom prema straga, a i vjenčić je i andrecej sasvim onako gragjen i postavljen, kao kod koje pentamerne *Dipsaceje*. Ako dakle uzmemo, da su predlistići kod *Scabiose* utajani, to ima *Linnaea* u istinu dijagram kao kakova *Scabiosa*, i tada je razlika samo u gineceju. Involucrum se *Linnaeje* razlikuje jedino slobodnim listovima od izvanje čaške *Dipsakacejâ*, gdje su se ovi listovi srasli.

---

[1] Über den Blüthenstand von Morina und den Hüllkelch (Auszenkelch) der Dipsacaceen. Engler: Botanische Jahrbücher. Bd. XVII. 1893.

[2] l. c. str. 406.

[3] l. c. str. 407.

Digitized by Google

Osobitu je pažnju priklonio Čelakovský monotipskomu rodu *Triplostegia*. Kako smo već čuli, u ovoga roda dolaze svagda po dva transversalna predlistića, a iz njihovih pazušaca nastaje dalje brahijalno razgranjivanje. Osobitost je kod *Triplostegije*, što imade dvostruku izvanju čašku. Donja se sastoji od četiri listića, koji su se samo pri dnu slabo srasli, i od njih su dva u transversali, a dva u medijani, baš kao i listići jedine izvanje čaške ostalih *Dipsakaceja*, i za to drži, da je sastavljena takogjer od dva dvočlana pršljena (2 + 2). Drugojačija je gornja izvanja čaška. Ona je cjevasta, ima osam rebara i na rubu osam posve jednakih zupčića, od kojih su četiri postavljena transversalno i medijano, a četiri dijagonalno. Höck je isporedio ovu izvanju čašku s visolistovima od *Patrinije*, gdje su ovi trokrpi, i misli, da je srastenjem dvaju ovakovih listića nastala gornja izvanja čaška u *Triplostegije*. Protiv toga navodi Čelakovský[1], da „bi dvije trokrpe brakteje srastavši se dale izvanju čašku ili sa 6 zubaca ili, ako bi se pobočni zupci srasli u komisuralne zupce, četveročlanu". S toga misli, da se ima i za gornju izvanju čašku držati, da je postala srastenjem od četiri listića, što nije ni Höck držao za nemoguće.

Sada se pita dalje Čelakovský, koji položaj imade ova gornja izvanja čaška: da li je ona superponovana donjoj, i onda bi se takogjer sastojala od dva dimerna pršljena, ili tvori pravi tetramerni pršljen, u kom bi slučaju morao ovaj biti u dijagonalnom položaju. Ni povijest razvoja a ni antoliza ovoga roda nije poznata, što bi jedino jednim mahom sa svom sigurnošću ovo pitanje riješilo. Uza sve to odlučio se on za drugi slučaj i za potkrepu svoga mnijenja navodi ovo dvoje. Ako u cvijetu iza dva dimerna pršljena čaške slijedi tetramerni vjenčić, to je ovaj gotovo svagda u dijagonalnom položaju, a po analogiji zaključuje, da će biti po svoj prilici tako i s gornjom nutarnjom čaškom od *Triplostegije*.

Kao najjaču potkrepu tomu svome mnijenju navodi jedan slučaj, što ga je Penzig motrio kod spomenute antolize od vrste *Scabiosa maritima*. U nekih je abnormiteta opažao Penzig dvije, pače tri do četiri izvanje čaške, koje su bile jedna u drugu utaknute. Od najvećega je interesa bio slučaj s dvije izvanje čaške, od kojih je donja imala transversalno-medijani, a gornja točno dijagonalni položaj, dok su cvjetni dijelovi zadržali svoj normalni položaj. Obje su izvanje čaške bile u donjem dijelu cjevaste, a

[1] Čelakovský l. c. str. 409.

Digitized by Google

njihove dugačke, linealne krpe na vrhu nešto raširene i tu trodjelne. „Ako pomislimo“, piše Čelakovský[1], „da krpe donje izvanje čaške imadu čitav okrajak i da su dublje razdijeljene t. j. da su se samo na dnu srasle, a gornje da su se sve do zubaca srasle i da su se po dva pobočna zupca srasla u jedan komisuralni zub, to dobijemo točno obje izvanje čaške od *Triplostegije*“. Kod ovoga je abnormiteta od roda *Scabiose* druga izvanja čaška novo pridošla, umetnuta tvorevina. Ali iz toga ne slijedi, misli Čelakovský, da bi u početku i *Triplostegia* imala samo jednu izvanju čašku, a druga da bi bila naknadno umetnuta. „Valja pače pomišljati, da su kod pregja *Dipsacejâ* u početku opstojala uz predlističe više nego dva izmjenita para visolistova, naime najmanje četiri, od kojih je najgornji par lateralno stajao, tako da se pentamerni cvijet na normalni način priključio. Dva donja para, ako su i bili u jedan krug postavljeni, zadržali su svoj prvotni položaj, dok su dva gornja u *Triplostegije*, pošto su se stegnuli u jedan pršljen, prešli u dijagonalni položaj, a da nijesu prvotni položaj cvjetnih krugova promijenili. Kod ostalih descendenata bio je broj parova visolistova reduciran na dva, i to na dva donja, koji su se stegnuli u jedan krug, te su se, zadržavši prvotni položaj, srasli u jednu izvanju čašku“.[2]

Na žalost nedostajalo mi je potrebna materijala za istraživanje ontogenije *Triplostegije*, što bi jedino moglo potvrditi ili oboriti tumačenje izvanje čaške ovoga roda, kako ga je dao Čelakovský. Uza sve to mislim, da sam našao sigurnih razloga, koji govore protiv mišljenju Čelakovskoga, a za drugojačije tumačenje. Za donju izvanju čašku od *Triplostegije* drži Čelakovský, da se sastoji od dva dimerna pršljena, a gornja od jednoga tetramernoga pršljena. Za što bi najednom gornja izvanja čaška imala biti od jednoga pršljena sastavljena, ne obrazlaže Čelakovský ničim. Ne mislim, da je i onaj abnormitet kod vrste *Scabiosa maritima*, što ga je Penzig motrio, takav, da bi iz njega nužno morao slijediti jednaki poregjaj kod *Triplostegije*. I sam Čelakovský kaže, da je osim spomenutoga slučaja bilo još i drugih varijacija, n. pr. tročlane i heteromerne izvanje čaške, koje kao normalni slučajevi nijesu realizovani i zato ne dozvoljavaju nikakove primjene na spoznaju kojega normalnoga slučaja“.[3] Ne znamo, zašto

[1] Čelakovský l. c. str. 410.
[2] Čelakovský l. c. str. 411.
[3] Čelakovský l. c. str. 411.

Digitized by Google

bi morao baš onaj jedini abnormitet biti realizovan u normalnom slučaju, dok oni drugi češći ne bi bili? Napokon su mnogi morfolozi protiv toga, da se iz virescencija stvaraju zaključci za normalne slučajeve. Ali važniji mi se čini ovaj razlog, koji govori protiv tumačenja Čelakovskoga. Čuli smo, da se donja izvanja čaška od *Triplostegije* sastoji od četiri uska listića, koji su samo pri dnu nešto malo skupa spojeni, dok imade gornja oblik cjevčice, kojoj rub imade jednakih osam zubaca. S malim je modifikacijama upravo takova jedina izvanja čaška u *Scabiosejâ*, te n. p. u vrste *Knautia arvensis* L. ima na rubu takogjer osam zubaca. Zato mislim, da je prirodnije uzeti gornju izvanju čašku od *Triplostegije* za homolognu jedinoj izvanjoj čaški ostalih *Dipsakaceja* nego li donju, koja je sastavljena od gotovo posve slobodna četiri listića. Ako pak ovo stoji, onda nema razloga, da ne uzmemo i za gornju izvanju čašku od *Triplostegije*, da je sastavljena od četiri listića, koji su kao i u drugih *Dipsakaceja* postavljeni u medijanoj i transversalnoj ravnini. Ako pomislimo, da u *Triplostegije* iščeznu predlistići i donja izvanja čaška, dobit ćemo običajni dijagram, što ga imadu cvjetovi *Dipsakacejâ*.

Istražujući povijest razvoja inflorescencija kod *Dipsakacejâ*, pružila mi se prilika, da motrim i razvoj njihovih cvjetova, te sam osobitu pažnju priklonio ontogeniji izvanje čaške. Cvjetni se primordiji pojavljuju kao polukuglaste uzvisine na zajedničkoj stapci inflorescencije (tab. I. sl. 5. i 6.). Domala se na polukuglastoj uzvisini pokažu na njezinoj medijani i transversali po četiri malena primordija, prvi počeci od četiri lista, od kojih će se sastojati izvanja čaška. Da li se medijani ili transversalni prvi pojavljuju, nije moći obično sa sigurnošću vidjeti. Jednom mi je uspjelo kod vrste *Scabiosa alpina* uhvatiti stadij, gdje su bili medijani primordiji znatno veći od transversalnih (tab. I. sl. 14.), po čem možemo zaključiti, da su oni stariji od ovih i da su se medijani prije zametnuli od transversalnih. Valja mi istaknuti, da nijesam to motrio možda pod sugestijom tumačenja Čelakovskoga, jer tada nijesam još ni znao za nj. Što se obično ne opaža nikakva razlika izmegju medijanih i transversalnih primordija, mislim, da nije razlog, koji bi govorio protiv toga, da su medijani kod pregja prije postojali od transversalnih. Danas je razmak u vremenu postanja izmegju njih tako neznatan, da se razlika u njihovoj veličini, kad ih već možemo zamijetiti, samo rijetko kada može vidjeti. Dok počne vegetativna točka cvjetnoga primordija stvarati medijani

Digitized by Google

pršljen listova, već ona prelazi u gragjenje i transversalnoga, za što oni dakako moraju doći u istu visinu. Ovi primordiji brzo se zatim sastanu svojim bokovima i tada rastu kao prsten oko cvjetnoga primordija, tvoreći tako izvanju čašku, koja štiti mjesto zakršljale prave čaške sam cvijet, a kasnije i plod.

Izvanja se čaška *Morine* u odraslom stanju razlikuje ponešto od izvanje čaške ostalih *Dipsakaceja*. Ova je sa strane stisnuta i nosi dvije kadšto goleme trnovite medijane krpe. Pobočni su zarezi kadšto posve ravni ili samo u vrlo kratku krpicu izvučeni. Čelakovský drži, da je i ovdje izvanja čaška tetramerna, samo što počinju lateralni listići iščezavati, i kaže, da bi bilo vrijedno znati, da li su i ovdje zametnuti u obliku primordija[1]. Na tabli III. na slici 12. naslikan je cvjetni primordij vrste *Morina longifolia*, kako se vidi s vrha. Tu se vide na obodu sasvim dobro četiri primordija: dva medijana i dva transversalna, kao i u drugih *Dipsakaceja*. Njihovi su se bokovi sa strane raširili i stopili u prsten, koji okružuje cvjetni primordij. Kakvih razlika izmegju transversalnih i medijanih primordija nije moći opaziti, a isto tako i u kasnijim stadijima. Na slici 13. na tabli III. naslikan je stadij, gdje je već zametnuta čaška i vjenčić, pa se ipak još ne vidi nikakva razlika medijanih *(i. m.)* i transversalnih *(i. č.)* listova. Istom kad je zajednička podina svih primordija do neke visine ponarasla, počnu se medijani isticati time, što se produlje u tanak nastavak (tab. III. sl. 10.). Iz toga vidimo, da i kod *Morine*, kao i kod drugih *Dipsakaceja*, sastavljaju izvanju čašku četiri listića, od kojih su dva u transversalnoj, a dva u medijanoj ravnini. Budući da u *Morine*, kako smo prije čuli, kadšto cvjetovi imadu predlistiće, moramo i za nju uzeti, da medijani listovi pripadaju donjemu, a transversalni gornjemu pršljenu. Što nad predlistićima dolaze još dva visolista, ne će se ovomu tumačenju ništa protiviti, ako uzmemo, da je još jedan par transversalnih predlistića abortiran, i moguće je, da će se oni naći kod drugih vrsta roda *Morina*, koje još nijesu u tom pogledu istraživane, i to tim prije, što Čelakovský kod vrsta *Morina persica* i *M. turcica* nije našao ni medijanih visolistova.

Neka mi bude dopušteno, da još jednom progjem u kratko resultate, do kojih nas je dovelo naše istraživanje. Najstariji oblik inflorescencija kod porodice *Dipsakacejâ* predočuju nam one, što

[1] Čelakovský l. c. str. 416.

Digitized by Google

ih imadu *Triplostegia* i *Morina longifolia* i *M. kokanica* (možda i još neke druge vrste ovoga roda, koje nijesam mogao istraživati). Kod njih je općena inflorescencija metlica ili thyrsus, kakav dolazi u najsrodnije porodice *Valerianacejâ*, koja nam svakako predočuje stariji tip od *Dipsakacejâ*. Postrance izlaze metlice u brahije. Kod *Triplostegije* imadu cvjetovi stapke, dok su u *Morine* one vrlo skraćene. Iz ovakovih metličastih inflorescencija nastale su reduciranjem inflorescencije ostalih *Dipsakaceja*. Od naše dvije vrste roda *Morine* čine ka glavicama *Scabiosejâ* prijelaz vrste *Morina persica* i *M. turcica*, što ih je Čelakovský istraživao, gdje je općena inflorescencija postala botritska time, što je pobočno razgranjivanje spalo na arhibrahije. Ako pomislimo, da se broj članova u pojedinim prašljenima općene inflorescencije poveća, a u pazušcu njihovih listova broj cvjetova reducira na sam primani, nastat će botritske glavičaste inflorescencije *Scabiosejâ*. Baillon je kod ovih jednom motrio atavizam, jer je u pazušcu zalistaka motrio arhibrahije. Kod pregja *Dipsakacejâ* (a i *Valerianacejâ)* bila je sva inflorescencija metlica. Reduciranjem tercijanih ogranaka na njima na sama dva nastala su brahijalna pobočna razgranjivanja, dok napokon nijesu od ovih nastale botritske inflorescencije time, što se tercijano razgranjivanje posve utajalo.

Cvjetne su stapke kod pregja *Dipsakacejâ* imale dva transversalna predlistića, kakvi obično u dvosupnica dolaze, a iza njih je slijedilo po više parova (najmanje četiri) dekusiranih visolistova, na koje se istom priključio cvijet. Ovakove visolistove nalazimo još kod nekih vrsta roda *Patrinia* megju *Valerianacejama* i kod roda *Linnaea* megju takogjer srodnima *Caprifoliacejama*. Megju današnjim *Dipsakacejama* nalazimo predlistiće samo kod roda *Triplostegia* i kod donjih primanih cvjetova roda *Morine*, dok su se inače posve utajali. Srastenjem dvaju dimernih prašljena visolistova, od kojih su medijani pripadali donjemu, a transversalni gornjemu prašljenu, nastala je izvanja čaška svih *Dipsakaceja*, s kojom je homologna gornja izvanja čaška u *Triplostegije*. Ovaj rod ima još i donju izvanju čašku, za koju moramo uzeti, da je takogjer sastavljena od dva dimerna prašljena. Ovoj donjoj izvanjoj čaški nema traga u drugih Dipsakaceja. Mislim, da sam joj našao homologon kod vrsta *Morina longifolia* i *M. kokanica*. Vidjeli smo, da osim predlistića dolaze kod ovih vrsta još i dva medijana listića na stapci primanoga postranoga cvijeta, te ovi listovi ostaju i onda, kad već predlistići abortiraju. Razlika od *Triplostegije* bila bi u

Digitized by Google

tom, što su kod ove listovi donje izvanje čaške sterilni, a u naših *Morina* fertilni, i što ovdje imade samo jedan dvočlani prašljen, dok su ondje dva. Kako kod svih drugih *Dipsakaceja* ova donja izvanja čaška ne dolazi, mislim, da imademo u spomenutih *Morina* početak abortiranja, koje se kod vrsta *Morina persica* i *M. turcica* još dalje nastavilo, jer tu nema više ni traga nijednomu prašljenu donje izvanje čaške.

Tumačenje slikâ.

I. Tabla.

Slika 1. *Dipsacus Fullonum* Mill. Primordij inflorescencije, dva predlistića, kako se vide sa strane. Povećanje je po prilici 30.

Slika 2. *Dipsacus Fullonum* Mill. Primordij kao i pregjašnji, samo kako se vidi odozgo. Poveć. 30.

Slika 3. *Dipsacus Fullonum* Mill. Još mlagji primordij nego na pregjašnjim slikama, na kom su se počeli tek zametati predlistići, kako se vidi odozgo. Povećanje po prilici 30.

Slika 4. *Dipsacus Fullonum* Mill. Nešto stariji primordij inflorescencije s dva predlistića, kako se vidi odozgo. Poveć. 30.

Slika 5. *Dipsacus Fullonum* Mill. Stariji primordij inflorescencije. Predlistići su *(pr)* otkinuti; isto je tako odrezan gornji dio ovojka *(o)*. Na donjem se dijelu inflorescencije opažaju polukuglasti cvjetni primordiji, koji su prema vrhu sve manji, a na vrhu ih još i nema. U pazušcu se (otkinutih) predlistića *pr* vidi posve mlad primordij inflorescencije. Gledano sa strane. Poveć. 30.

Slika 6. *Dipsacus Fullonum* Mill. Nešto starija inflorescencija od pregjašnje. Predlistići *pr* otkinuti su, a u njihovu se pazušcu vidi sasvim mlada inflorescencija. Cvjetni se primordiji nalaze već bliže vrhu. Poveć. 30.

Slika 7. *Dipsacus Fullonum* Mill. Mlada inflorescencija, kako se vidi odozgo. Predlistići *pr* u prorezu. Na inflorescenciji se vide na obodu zameci listova ovojka. Poveć. 30.

Slika 8. *Dipsacus silvestris* L. Mlada inflorescencija, kako se vidi sa strane. Predlistići su otkinuti. Iznad listića ovojka pojavljuju se prvi cvjetni primordiji. Inflorescencija je još vrlo plosnata. Poveć. 30.

Slika 9. *Knautia silvatica* (L.) Duby. Sasvim mlada inflorescencija, kako se vidi odozgo. Jedan je predlistić *(pr)* odmaknut. Poveć. 30.

Slika 10. *Knautia silvatica* (L. Duby). Kao pregjašnje, samo se ovdje vidi prvi listić ovojka *(o)*. Poveć. 30.

Slika 11. *Knautia silvatica* (L.) Duby. Nešto starija inflorescencija, kako se vidi sa strane. Prednji je predlistić *(pr)* odmaknut i otkinut do polovice, da se vidi u njegovu pazušcu sasvim mlad primordij inflorescencije *(in)*. Na glavnoj se inflorescenciji vide prvi listići ovojka. Poveć. 30.

Digitized by Google

Slika 12. *Knautia silvatica* (L.) Duby. Starija inflorescencija; predlistići su otkinuti. Cvjetni primordiji nastaju akropetalnim redom, dok je vrh još bez njih. Poveć. 30.

Slika 13. *Cephalaria tatarica* (Gmel.) Schrad. Na inflorescenciji su se pokazali cvjetni primordiji tek do polovice njezine. Jedan je listić ovojka *(o)* otkinut. Inflorescencija, kako se vidi sa strane njezina zaliska; oba su njezina predlistića otkinuta, da se vide u njihovu pazušcu sasvim mladi primordiji inflorescencija *(in)*, na kojima su se istom diferencirali njihovi predlistići *(pr)*. Poveć. 30.

Slika 14. *Scabiosa alpina* L. Cvjetni primordij sa zaliskom *(z)* svojim. Na njemu se vide zameci izvanje čaške; transversalni su listići manji od medijanih. Poveć. 100.

II. Tabla.

Morina kokanica Regel.

Slika 1. Vrh općene inflorescencije, kako se vidi odozgo. Vrh je *(v)* polukuglast i pod njim se vide tročlani prašljeni listova *(l)*, koji alterniraju. U pazušcu listova drugoga prašljena vidi se primordij postrane inflorescencije *(in)*, a u pazušcu listova trećega prašljena zameci triju cvjetova *(fl_3 fl_1 fl_2)*. Primordiji u ostala dva lista trećega prašljena nijesu naslikani. Poveć. 100.

Slika 2. Sasma mlad primordij postrane inflorescencije i tri cvijeta *(fl_2 fl_1 fl_2)*, kako se vidi sa strane. Poveć. 100.

Slika 3. Nešto starija postrana inflorescencija, kako se vidi sprijeda. To je dvostruka kovrčica sa pet cvjetnih primordija *(fl_3 fl_2 fl_1 fl_2 fl_3)*. Poveć. 100.

Slika 4. Stadij kao i u pregjašnjem, samo što ovdje desni cvjetni primordij *(fl_3)* prelazi u dibrahij. Poveć. 100.

Slika 5. Nešto stariji stadij. Na lijevo od primanoga cvijeta *(fl_1)* kovrčica do trećega *(fl_3)* stepena razgranjivanja, a na desno dibrahij, kojemu od stražnjega cvijeta dalje ne ide razgranjivanje, a od prednjega nastaje još jedan dibrahij. Poveć. 100.

Slika 6. Nešto stariji stadij. Na lijevo od primanoga cvijeta *(fl_1)* kovrčica do četvrtoga stepena razgranjivanja, na desno dibrahij, koji sprijeda i straga prelazi u kovrčicu do četvrtoga stepena razgranjivanja. Poveć. 100.

Slika 7. Starija postrana inflorescencija. S obje strane primanoga cvijeta dibrahijalno razgranjivanje, koje prelazi u monobrahije. Poveć. 30.

Slika 8. Parcijalna inflorescencija iz pazušca najdonjih listova općenite inflorescencije. U pazušcu zaliska (koji nije naslikan) vidi se inflorescencija s dva manja transversalna predlistića *(pr_1)* i dva veća medijana visolista *(pr_2)*. Poveć. 30.

Slika 9. Parcijalna inflorescencija iz sredine sl. 8. izmegju oba visolista *(pr_2)*, kako se vidi odozgo. Dvostruka kovrčica s razgranjivanjem do trećega stupnja. Poveć. 100.

Slika 10. Parcijalna inflorescencija, kao i na slici 8., samo što ovdje predlistića *(pr_1)* nema. Poveć. 30.

Digitized by Google

Slika 11. Parcijalna inflorescencija iz sredine sl. 10. izmegju visolistova *(pr_2)*, kako se vidi sa strane. Dvostruka kovrčica s razgranjivanjem na lijevoj strani do 4., a na desnoj do 3. stupnja. Poveć. 30.

Slika 12. Parcijalna inflorescencija kao i u 10. Poveć. 30.

Slika 13. Parcijalna inflorescencija iz sredine sl. 12. Dibrahij do drugoga stepena razgranjivanja. Visolist okrenut k osi sasvim otkinut, a okrenut od nje *(pr_2)* do polovice. Poveć. 10.

Slika 14. Vrh vegetativne osi gledan odozgo. Na osi su bili poregjani listovi u dekusiranim parovima *(f_1)*, na vrhu je iza njih slijedio tročlani pršljen *(f_2)*. Poveć. 100.

III. Tabla.

Morina longifolia Wall.

Slika 1. Parcijalna inflorescencija iz donjih zalistaka općenite inflorescencije; pr_1 predlistići parcijalne inflorescencije, a pr_2 njezini visolistovi. Gledano odozgo. Poveć. 100.

Slika 2. Parcijalna inflorescencija nalik na pregjašnju, samo kako se vidi sprijeda. Poveć. 100.

Slika 3. Parcijalna inflorescencija kao i na pregjašnjoj slici, samo što ovdje nema drugoga predlistića. Poveć. 100.

Slika 4. Inflorescencija iz sredine sl. 3. Visolist okrenut ka glavnoj osi otkinut, a okrenut od nje samo do polovice *(pr_2)*. Poveć. 100.

Slika 5. Parcijalna inflorescencija kao i na slici 3., samo što je ovdje u desnom dijelu razgranjivanje brahijalno do višega stepena. Poveć. 100.

Slika 6. Parcijalna inflorescencija iz jednoga najdonjega zaliska općene inflorescencije. Na njoj se vide dva predlistića pr_1 i dva visolista pr_2; prvi su u transversali, a drugi u medijani. Poveć. 30.

Slika 7. Parcijalna inflorescencija iz sredine sl. 6. Dvostruka kovrčica, na lijevo s razgranjivanjem do petoga, a na desnoj do trećega stupnja. Poveć. 100.

Slika 8. Lijeva parcijalna inflorescencija iz sl. 6.

Slika 9. Desna parcijalna inflorescencija iz sl. 6. U oba slučaja jednostavne kovrčice s razgranjivanjem do drugoga stupnja. Poveć. 100.

Slika 10. Parcijalna inflorescencija iz nešto višega zaliska opće inflorescencije. Predlistićâ nema, razvijeni su samo visolistovi *(pr_2)*. Povećano 100.

Slika 11. Parcijalna inflorescencija iz sredine slike 10. izmegju visolistova pr_2. Jednostavna kovrčica. Poveć. 100.

Slika 12. Cvjetni primordij, kako se vidi odozgo. Na njemu se vide četiri začetka *(i)* listova izvanje čaške. Poveć. 100.

Slika 13. Nešto stariji cvjetni primordij, kako se vidi sa strane; *im* medijani, *it* transversalni listići izvanje čaške; *č* prava čaška; *v* vjenčić. Poveć. 100.

Digitized by Google

O jednoj cirkularnoj kubičnoj elipsi i njezinoj projekciji.

Primljeno u sjednici matematičko-prirodoslovnoga razreda Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti dne 7. svibnja 1904.

Napisao član dopisnik dr. Juraj Majcen.

Prostorne su krivulje trećega reda do sada promotrene na temelju projektivnoga proizvođenja ponajviše uz obzir na projektivna njihova svojstva. Metrične su vlastitosti ovih krivulja usprkos eminentnoj analogiji s krivuljama drugoga reda vrlo slabo istražene. U ovim recima podajem malen prilog za određenje i vlastitosti jedne kubične elipse metričnoga karaktera, koja ima za projekciju jednu do sada nepoznatu vrstu generalizirane konhoide.

Red je ove projekcije ustanovljen iz metrične njezine definicije analitički. Kubična je elipsa određena iz svoje projekcije, a onda su istražene vlastitosti, koje izlaze iz međusobnih relacija obadviju krivulja, a tiču se poglavito različnih određenja njihovih tačaka i tangenata.

1. Izabrat ćemo na rotacionom jednoplošnom hiperboloidu Φ po volji izvodnicu p. Sve izvodnice sistema t^i, kojemu p ne pripada, sijeku ovu izvodnicu u tačkama T^i. Od svake ćemo tačke T^i na pripadnu izvodnicu t^i prenijeti konstantnu dužinu m, pa ćemo istražiti geometrijsko mjesto krajnih tačaka P^i dužinâ m, ako pretpostavimo, da su sve dužine m prenesene na istu stranu pravca p.

Rotacioni ćemo hiperboloid projicirati na ravninu njegove najmanje kružnice k. U sl. je 1. ova ravnina ujedno ravnina crtnje.

Zadana se izvodnica p projicira u tangentu p_1 najmanjega kruga k, koji ima polumjer r. Sve će se izvodnice sistema t^i na Φ projicirati kao tangente t_1^i istoga ovoga kruga. Sjecište T_1^i projekcijâ t_1^i bit će projekcija pripadnoga sjecišta T^i na hiperboloidu.

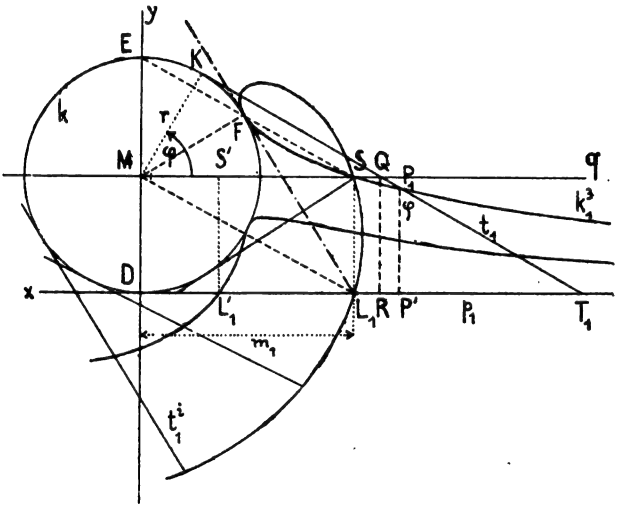
Budući da su sve izvodnice sistema t^i jednako priklonjene prema ravnini najmanjega kruga, bit će dužine projekcijâ m_1 zadanoga

Digitized by Google

prušca m na projekcijama svih izvodnica t_1^i među sobom jednake. Projekcije će dakle P_1^i krajnih tačaka P^i na t^i dati krivulju k_1^3, koja će biti projekcija tražene prostorne krivulje na hiperboloidu.

2. Krivulja je k_1^3 u ravnini definirana kao geometrijsko mjesto tačaka P_1, koje na tangentama t_1^i kruga k imaju od sjecišnih tačaka sa čvrstom tangentom p_1 kruga k jednake udaljenosti m_1, pri čem valja opaziti, da su dužine m_1 prenesene na sve tangente t_1^i u istom smislu.

Da odredimo red krivulje k^3, uzet ćemo pravac p_1 za os apscisa, a diralište toga pravca s krugom k za ishodište pravokutnoga koordinatnoga sustava.



Sl. 1.

Središtem ćemo M kruga k povući paralelu q s pravcem p_1. Od pozitivnoga smjera pravca q do polumjera kruga k, koji prolazi diralištem promjenljive tangente t_1^i, možemo mjeriti parametrični kut φ. Uzmimo tangentu t_1 kruga k, koja p_1 siječe u T_1, pa učinimo da bude $\overline{T_1 P_1} = m_1$. Tačka P_1, koja ima koordinate x i y, pripada krivulji k_1^3.

Iz sjecišta ćemo Q pravaca q i t_1 povući okomicu na os x, pa ćemo nožište njezino obilježiti sa R. Okomica iz P_1 na os x ima nožište P'. Koordinate se x i y mogu ovako izraziti:

Digitized by Google

$$y = m_1 \cos\varphi$$

$$x = DR + RT_1 - P'T_1 = \frac{r}{\cos\varphi} + r\,\mathrm{tang}\,\varphi - m_1 \sin\varphi$$

ili ako se u drugu jednadžbu uvrsti vrijednost iz prve:

$$x = \frac{rm_1}{y} + \sin\varphi \left(\frac{rm_1}{y} - m_1\right).$$

Imamo dakle

$$\sin\varphi = \frac{xy - m_1 r}{m_1 r - m_1 y} \text{ i } \cos\varphi = \frac{y}{m_1}.$$

Eliminiramo li s pomoću poznate temeljne goniometrijske jednadžbe kut φ, imat ćemo jednadžbu krivulje k_1^3:

$$\left(\frac{xy - m_1 r}{m_1 r - m_1 y}\right)^2 + \frac{y^2}{m_1^2} = 1$$

ili u razvijenom obliku:

$$y^3 - 2ry^2 + y(r^2 + x^2 - m_1^2) - 2rm_1(x - m_1) = 0 \ldots\ldots (k_1^3).$$

Naša je dakle krivulja **trećega reda**, koja ima jednu **uvijek reelnu dvostruku tačku**.

Postavimo li $x = m_1$, imamo jednadžbu trećega stepena, koja ima jedan korijen $y = 0$, a druga dva izlaze iz kvadratne jednadžbe:

$$y^2 - 2ry + r^2 = 0.$$

Korijeni su ove jednadžbe jednaki, pa je zato ordinata dvostruke tačke S $y = r$.

Promotrimo li dužinu m_1 prema polumjeru r kruga k, opazit ćemo, da će za sva tri slučaja $m_1 \gtrless r$ dvostruka tačka S biti reelna, jer gornja kvadratna jednadžba nije zavisna o veličini m_1.

Za $m_1 > r$ bit će dvojna tačka $S(m_1, r)$ izvan kruga k, krivulja ima u tom slučaju **prijevoj** (Schleife).

Za $m_1 = r$ prelazi dvostruka tačka u **šiljak**.

Za $m_1 < r$ imamo opet reelnu dvostruku tačku, koja je **izolirana**. Njezine koordinate zadovoljavaju i opet jednadžbu krivulje

Digitized by Google

ali po definiciji krivulje ne može ona pripadati krivulji, jer bi morala biti na kojoj tangenti t_1^i krivulje k, što je poradi $x < r$, $y = r$ isključeno[1].

Uvijek reelna dvostruka tačka projekcije k_1^3 znači, da krivulja na hiperboloidu, koja se projicira u k_1^3, ima svagda reelnu dvostruku sekantu, kojoj je smjer okomit na ravnini najmanjega kruga k. Prema tomu, kako je već $m_1 \gtrless r$, sjeći će ova dvostruka sekanta hiperboloid u dvije reelne tačke, koje su rastavljene, ili će ona biti tangenta hiperboloida ili će napokon sjecišne njezine tačke sa Φ biti imaginarne.

3. Poradi jednoznačnoga projektivnoga određenja krivulje k_1^3 trebat će dokazati, da os apscisa ima takovu tačku krivulje (L_1), da krivulja u ovoj tački prelazi posve s jedne strane osi x na drugu.

Poradi lihoga stepena jednadžbe vrijedit će ova pravila:

Ako je $+x > m_1$, bit će općeni član u jednadžbi k_1^3 negativno obilježen. Jednadžba će dakle imati svakako jedan pozitivni korijen. Budući da će ujedno $r^2 + x^2 - m_1^2$ biti pozitivna veličina, moraju i ostala dva korijena biti pozitivno obilježeni, jer će članovi potpune jednadžbe biti obilježeni izmjenice sa $+$ i $-$.

Ako je $+m_1 > x > -\infty$, bit će općeni član u jednadžbi pozitivno obilježen. Jednadžba će dakle imati bar jedan negativni korijen. Veličina će $r^2 + x^2 - m_1^2$ moći uza to biti ili pozitivna ili negativna, jer je $r^2 > 0$, pa će članovi jednadžbe biti označeni sa $+ - + +$ ili sa $+ - - +$. U obadva slučaja može dakle jednadžba imati najviše jedan negativni korijen, koji joj poradi pozitivnoga općenoga člana nužno pripada. Imaginarni će dakle korijeni biti uvijek pozitivni.

Tim je dokazano, da krivulja prelazi u tački L_1 $(m_1, 0)$ s jedne strane osi apscisa posve na drugu stranu.

Već iz same definicije krivulje k_1^3 izlazi, da je pravac p_1 asimptota krivulje. Ordinata y ima naime vrijednost $y = m_1 \cos \varphi$. Što je dakle kut φ veći, t. j. što je sjecište tangente t_1^i sa pravcem p_1 dalje od početne tačke D, to je ordinata uz konstantnu veličinu m_1 apsolutno manja.

[1] U slici 1. prikazane su dvije krivulje k_1^3, i to za $m_1 \gtrless r$.

Digitized by Google

Da je pravac p_1 ujedno jedina reelna asimptota krivulje, može se lako vidjeti i iz drugoga jednoga oblika njezine jednadžbe, koji ćemo već ovdje prikazati, jer ćemo ga i onako trebati za kasnija razmatranja.

Transformacijom koordinata možemo dvostruku tačku krivulje učiniti novom početnom tačkom sustava.

S pomoću jednadžbi

$$x = x' - m_1 \quad \text{i}$$
$$y = y' - r,$$

gdje x' i y' znače predašnje koordinate, dobivamo jednadžbu krivulje u ovom obliku:

$$(y + r)(x^2 + y^2) + 2m_1xy = 0 \ldots\ldots (1).$$

Ova nam jednadžba pokazuje, da je krivulja k_1^3 cirkularna i da je pravac $y = -r$ (t. j. pravac p_1) njezina jedina reelna asimptota.

Da je naša racionalna krivulja ujedno unikursalna, vidi se već iz toga, što ima uvijek reelnu dvostruku tačku. Od šest tačaka, koje određuju ovu cirkularnu krivulju trećega reda, možemo četiri po volji izabrati, ostala su dva linearna uvjeta ekvivalentna s njezinom vlastitošću, što se tiče dužine m_1. Na dalje se vlastitosti njezine svraćamo u čl. 10. i 11.

Spojimo li središte M kruga k s tačkom L_1, a dvostruku tačku S sa krajnom tačkom E dijametra MD, dobit ćemo dva paralelna pravca, od kojih će posljednji sjeći krug k u tački F. Povučemo li još pravac FL_1, imamo simetrični trapez $MFSL_1$, pa se vidi, da je svagda $MS = FL_1 = m_1$. Prema tomu će tačka F pripadati krivulji, jer je pravac L_1F tangenta kruga k. Tačka je F sjecište prostorne krivulje na hiperboloidu s ravninom najmanjega kruga (k). Budući da je krug k međašna (konturna) crta hiperboloida u projekciji, izlazi, da je pravac L_1F zajednička tangenta kruga k i krivulje k_1^3, a tačka F njihovo diralište.

4. Određena se krivulja k_1^3 dade predočiti kao proizvod dvaju projektivnih pramenova zrakâ, od kojih je jedan drugoga reda, a drugi prvoga reda.

Prvi pramen $[k]$ određuju sve tangente t_1^i kruga k, a pramen prvoga reda $[S]$ ima središte u dvostrukoj tački S krivulje k_1^3.

Digitized by Google

Da se pokaže, kako ovi pramenovi proizvode krivulju k_1^3, dokazat ćemo, da se pramenovi nalaze u jednoznačnoj projektivnosti. Povući ćemo kojugod tangentu t_1^i kruga k. Ovoj tangenti pripada jedna jedina tačka na krivulji, i to krajna tačka P_1^i dužine m_1, koja je na onu tangentu prenesena od njezina sjecišta $(t_1^i\ p_1)$ u smislu, koji određuje krivulja.

Zraci će dakle t_1^i pramena $[k]$ korespondirati u pramenu $[S]$ jedina zraka SP_1^i.

Obrnuto će zraci SP_1^j, gdje je P_1^j makar koja tačka krivulje k_1^3, korespondirati u pramenu $[k]$ jedna jedina tangenta. Iz tačke će se P_1^j doduše moći povući dvije tangente na krug k, ali će samo jedna od njih pripadati tački P_1^j, dakle i zraci SP_1^j, i to ona, iz koje je tačka P_1^j krivulje postala. Da se odredi ova prava tangenta, uzet ćemo u obzir položaj tačke P_1^j prema osi apscisa (p_1). Ako je izabrana tačka P_1^j nad osju apscisa, pripadat će joj tangenta, za koju je diralište na polukrugu desno od osi ordinata. Za sve će naime tačke krivulje od $+\infty$ do L_1 biti parametri φ između 0^0—90^0 i 270^0—360^0. Za tačke krivulje od L_1 do $-\infty$ bit će parametri φ između 90^0—180^0 i 180^0—270^0, dakle dirališta pripadnih tangenata lijevo od osi ordinata.

Ova je jednoznačna korespondencija upravo zato moguća, što os apscisa dijeli sve tačke krivulje, koje pripadaju jednoj i drugoj vrsti, kao što je dokazano u čl. 3.

Tangentama krivulje k^3 u njezinoj dvostrukoj tački pripadat će u pramenu $[k]$ obje tangente iz S na k. Koji parovi ovih tangenata pripadaju zajedno, vidjet će se iz korespondencije makar kojih pet pripadnih parova zraka ili iz postojanoga slijeda tačaka na k_1^3 i tangenata kruga k.

Spomenuli smo u čl. 2., da je dvostruka tačka S krivulje k_1^3 projekcija dvostruke sekante za prostornu krivulju na hiperboloidu Φ. Sve zrake pramena $[S]$ možemo sad uzeti kao tragove ravnina na ravnini najmanjega kruga k, koje prolaze dvostrukom sekantom s te prema tomu tvore svežanj ravnina $[s]$. Ovaj će svežanj biti jednoznačno projektivan sa sistemom izvodnica t^i na hiperboloidu, jer projekcije tih izvodnica čine pramen drugoga reda $[k_1]$, koji je s projekcijom svežnja $[s]$ t. j. s pramenom $[S]$ projektivan. Izvodnica će n. pr. t^i hiperboloida sjeći ravninu (sP_1^i) svežnja $[s]$

Digitized by Google

u tački P^i, za koju je P_1^i ortogonalna projekcija, dakle tačka krivulje k_1^3. Prema tomu će tačka P^i biti na prostornoj krivulji k^3. Ravnini (sL_1) svežnja $[s]$ korespondira izvodnica t hiperboloida, za koju se projekcija pokriva s projekcijom p_1 izvodnice p. Ravnini, koja prolazi dvostrukom sekantom s i neizmjerno dalekom tačkom krivulje k_1^3, korespondira izvodnica t' hiperboloida, koja je s čvrstom izvodnicom p paralelna.

Budući da po poznatom zakonu sistem izvodnica pravčaste plohe drugoga reda proizvodi s projektivnim svežnjem ravnina $[s]$ prostornu krivulju trećega reda, vidi se, da će takova krivulja biti naša tražena krivulja k^3.[1]

S razloga, što je u paralelnoj projekciji projekcija asimptote ujedno asimptota projekcije, bit će izvodnica p asimptota prostorne kubične krivulje k^3. Ta će krivulja prema predašnjemu dokazu za projekciju imati samo jednu, i to konačnu reelnu asimptotu. Ostale su dvije njezine neizmjerno daleke tačke imaginarne.

Tražena je dakle krivulja k^3 kubična elipsa.

5. Krivulja će k^3 na hiperboloidu sjeći ravninu najmanjega kruga k u tri tačke. Te će tri tačke biti identične sa tri od šest zajedničkih tačaka krivulja k_1^3 i k. Krivulje k^3 i k imaju zajedničku tačku F, i to kao jednostavnu tačku, dok se ova ista tačka za krivulje k i k_1^3 ima dvostruko računati (čl. 3.). Budući da ove krivulje imaju još dvije zajedničke apsolutne tačke, izlazi, da su ostale dvije zajedničke tačke (kk_1^3) uvijek imaginarne, jer krivulja k^3 siječe ravninu π samo u tri tačke.

Kubična se dakle elipsa k^3 dade proizvesti iz sistema izvodnica t^i na hiperboloidu Φ iz svežnja paralelnih ravnina, koji je sa sistemom t^i jednoznačno projektivan, a položaj mu je okomit na osi hiperboloida.

Iz svega izlaze za kubičnu elipsu k^3 ove osobitosti:

Kubična je elipsa k^3 cirkularna krivulja.

Dužine su na izvodnicama t^i među krivuljom i njezinom asimptotom (p) jednake (m).

Asimptota je krivulje (p) izvodnica plohe Φ.

---

[1] Ovaj dokaz vrijedi za sva tri slučaja $m_1 \gtreqless r$, jer je dvostruka tačka krivulje k_1^3, a poradi toga i dvostruka sekanta s svagda reelna.

Digitized by Google

Budući da je kubična krivulja na plohi Φ određena sa pet tačaka, moći ćemo za krivulju k^3 izabrati samo dvije tačke na plohi po volji. Dvije su druge tačke određene već tim, što je krivulja cirkularna. Za projekciju će se dakle k_1^3 moći uza zadani krug k opet izabrati dvije tačke po volji. Za ove će odredbene elemente resultirati konačni broj krivulju k_1^3. Taj ćemo broj odrediti ovako.

Ako su X_1 i Y_1 dvije zadane tačke u π, može se pitati: Koliko će biti moguće takovih tangenata p_1^k kruga k, da će dužine na tangentama iz X_1 i Y_1 na k između X_1 i Y_1 pa do p_1^k biti međusobno jednake (m_1^k). S pomoću poznatih zakona[1] o sistemima jednakih pružaca na projektivnim nizovima dobit će se na tangenti iz X_1 dvije dužine $\overline{R_1 S_1}$, a na tangenti iz Y_1 dvije dužine $\overline{R_1' S_1'}$, tako da će biti $\overline{R_1 S_1} = \overline{R_1' S_1'}$, a ujedno $\overline{R_1 X_1} = \overline{R_1' Y_1}$, dakle i $\overline{S_1 X_1} = \overline{S_1' Y_1}$. Budući da se četiri tangente iz X_1 i Y_1 na k dadu kombinirati u četiri para, koji vrijede, vidi se, da će u opće biti moguće šesnaest tangenata p_1^k, koje će biti asimptote krivuljâ u π. Od ovih će krivulja već prema položaju tačaka X_1 i Y_1 biti samo jedan dio reelan.

Na plohi će Φ biti broj ovakovih krivulja k^3 manji, jer će od izvodnica plohe, koje prolaze tačkama X i Y, vrijediti samo one kombinacije (2), u kojima dolaze mimosmjerne izvodnice (t^i). Iz toga izlazi ovaj zakon:

Izaberu li se na Φ dvije tačke X i Y, moći će se njima položiti osam (djelomično imaginarnih) cirkularnih kubičnih elipsa k^3 na Φ s asimptotama p^k $(k = 1, 2, 3, \ldots, 8)$, koje imaju sva svojstva navedena u ovom čl. za osobite krivulje k^3. Dužine će m^k biti u opće različne.

6. Kubičnom elipsom možemo položiti samo jedan reelni valjak Ξ. U našem je slučaju taj valjak određen izvodnicom p hiperboloida. Svaka ravnina, koja je na osi hiperboloida okomita, siječe krivulju u jednoj reelnoj i u dvije apsolutne tačke. Ta će

[1] Određenje ovakovih pružaca izlazi s pomoću poučaka u djelu: W. Fiedler, Die darstell. Geom. in org. Verb. mit der Geom. d. Lage, II. izd., str. 38.

Digitized by Google

ravnina sjeći valjak Ξ u krivulji drugoga reda, koja prolazi onim istim tačkama, u kojima k^3 siječe ravninu.

Imamo dakle ovaj korolar:

Prenesu li se od sjecišnih tačaka makar koje čvrste izvodnice (p) rotacionoga hiperboloida s izvodnicama protivnoga sistema (l^i) u istom smislu na ove izvodnice jednake dužine (m), pa se krajnim njihovim tačkama povuku paralele s čvrstom izvodnicom, dobit će se izvodnice valjkovite plohe drugoga reda, za koju je smjer cikličnih ravnina jednoga sistema okomit na osi hiperboloida.

Valjak trećega reda, koji krivulju k^3 projicira ortogonalno u krivulju k_1^3, daje kao potpuni presjek s rotacionim hiperboloidom Φ krivulju šestoga reda.

Budući da je jedan dio ovoga presjeka, t. j. krivulja k^3, trećega reda, bit će i ostali dio krivulja trećega reda. Asimptota će za ovu drugu krivulju biti ona izvodnica t hiperboloida, koja se zajedno s izvodnicom p projicira u p_1. Obadvije će krivulje trećega reda na hiperboloidu biti simetrične prema ravnini najmanjega kruga k, one će dakle biti kongruentne. Druga je krivulja postala na isti način kao i k^3, samo su sve dužine m prenesene na t^i na drugu stranu od njihovih sjecišnih tačaka sa t. U ovim odnosima imamo zanimljiv slučaj, gdje krivulja šestoga reda degenerira u dvije kongruentne prostorne krivulje trećega reda.

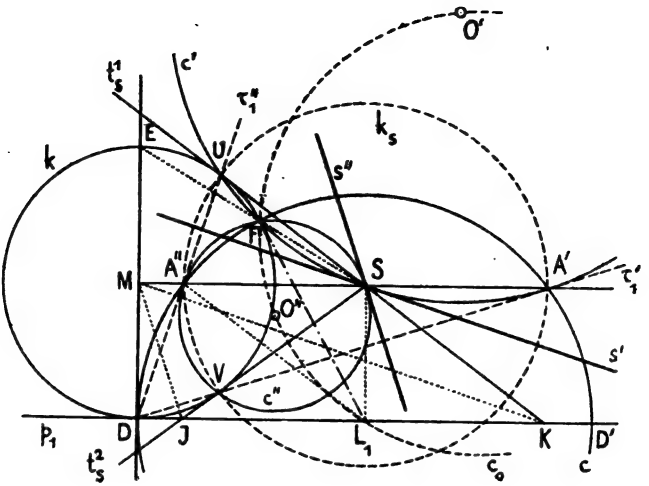
Po zakonima, što ih je dao Cremona za rotacione plohe[1], koje prolaze kubičnim krivuljama, izlazi neposredno, da našom krivuljom osim rotacionoga hiperboloida Φ ne prolazi nijedna druga rotaciona ploha drugoga reda.

7. Promotrimo li međusobni utjecaj vlastitosti krivulja k^3 i k_1^3, dobit ćemo za prvu krivulju nov način proizvođenja, za drugu pak krivulju poglavito konstrukciju tangenata u njezinoj dvostrukoj tački S (sl. 2.).

Budući da je ravnina kruga k ravnina simetrije za hiperboloid, bit će tačke S' i S'', u kojima dvostruka sekanta s krivulje k^3 siječe hiperboloid, od ravnine simetrije (π) jednako udaljene. Tačka je S' nad tom ravninom, tačka S'' ispod nje, zajednička je projekcija njihova na π u S.

[1] Cremona, Sur les hyperboloïdes de rotation qui passent par une cubique gauche donnée, Crelle, Journ. f. r. u. a. Math., sv. 63., str. 144.

Digitized by Google



Sl. 2.

Povučemo li tačkama S' i S'' izvodnice hiperboloida, koje sijeku izvodnicu p, imat će projekcije t_s^1 i t_s^2 do njihovih probodišta U i V sa ravninom π jednake dužine. Iz tačaka S' i S'' možemo krivulju k^3 projicirati čunjevima drugoga reda. Prema predašnjim izvodima o valjku Ξ bit će presjeci ovih čunjeva s ravninom π krugovi c' i c'', koji će se ovako odrediti. Spojnica $S'R_\infty$, gdje je R_∞ neizmjerno daleka reelna tačka kubične elipse k^3, bit će jedna izvodnica prvoga čunja, a na isti se način dobiva jedna izvodnica $S''R_\infty$ drugoga čunja. Budući da je izvodnica t_s^1 hiperboloida prema ravnini π jednako priklonjena, kao i izvodnice t_s^2 i p, bit će i izvodnice $S'R_\infty$ i $S''R_\infty$ obadvaju čunjeva priklonjene prema π za isti kut, kao i one predašnje. Dužine će dakle ovih izvodnica od vrhova njihovih čunjeva pa do ravnine π biti u projekcijama $SA' = SA'' = SU = SV$, tako da su tačke U, A'', V, A' na istoj kružnici k_s.

Krivulja k^3 ima u ravnini π jednu reelnu tačku F. Ovom će tačkom prolaziti osnovke obadvaju čunjeva, od kojih je svaka određena sa tri tačke, t. j. osnovka c' sa F, S, A' i osnovka c'' sa F, S, A''. Budući da su one izvodnice hiperboloida Φ, koje pripadaju istomu sistemu, kao i njegova izvodnica p, dvostruke sekante krivulje k^3, vidi se, da će $S'U$ biti kao jedna dvostruka

Digitized by Google

sekanta krivulje izvodnica prvoga čunja. Njezino je probodište sa π tačka U, pa će zato ova tačka biti na osnovci c' prvoga čunja. Iz sličnih je razloga tačka V na drugoj osnovci c''. Središta su ovih osnovaka tačke O' i O''.

Osim zajedničke izvodnice $S'S''$ imaju čunjevi jedan par paralelnih izvodnica, t. j. $S'A'$ i $S''A''$. Budući da je presjek ovih čunjeva kubična elipsa k^3, dobit će se njezina asimptota p kao presječnica tangencijalnih ravnina τ' i τ'' čunjevâ duž paralelnih njihovih izvodnica. Tragovi su ovih ravnina u projekciji označeni sa τ_1' i τ_1''. Tragovi će se sjeći u probodištu njihove presječnice p sa ravninom π, dakle u tački D.

Svaka od ravnina τ' i τ'' prolazi jednom izvodnicom hiperboloida, i to izvodnicom p, svaka mora dakle sadržavati još po jednu izvodnicu plohe. Ravnina će n. pr. τ' sadržavati izvodnicu, koja prolazi tačkom S' i siječe p; to je dakle izvodnica t_s^2, za koju je projekcija identična sa t_s^2. Trag će τ_1' ove ravnine prema tomu prolaziti probodištem ove izvodnice na π, t. j. tačkom V. Na isti način izlazi, da će trag τ_1'' prolaziti tačkom U.

Tangente krivulje k^3 u njezinim tačkama S' i S'' projiciraju se u tangente krivulje k_1^3 u njezinoj dvostrukoj tački S. Da odredimo konstrukciju ovih tangenata, postupat ćemo ovako. Budući da je $\overline{SA''} = SV$, bit će središte O'' kruga c'' na raspolovnici kuta VSA'', no budući da je $SV = SA'$, bit će VA' paralelno s raspolovnicom SO'', t. j. tangenta je s'' krivulje u dvostrukoj tački S okomita na τ_1'. Na isti se način dokazuje, da je druga tangenta s' u S okomita na τ_1''. Opazimo li dalje, da su tačke U i V dirališta tangenata t_s^1 i t_s^2 iz S na k, a D diralište pravca p_1 sa k, imamo za tangente s' i s'' u dvostrukoj tački S krivulje k_1^3 ovu jednostavnu konstrukciju:

Iz dvostruke će se tačke S krivulje k_1^3 na krug k povući obje tangente i potražiti njihova sjecišta s pravcem p_1. Sjecišta će se I i K spojiti sa središtem M kruga k. Tražene su tangente u S s ovim spojnicama paralelne.

Za jasnoću konstrukcije dodajemo, da su τ_1' i τ_1'' polare tačaka I i K s obzirom na k.

U čl. 10. prikazat ćemo općenu konstrukciju za tangente krivulje k_1^3, koja se ne da direktno primijeniti na tangente u dvo-

Digitized by Google

strukoj njezinoj tački S; zato je jedna konstrukcija ovih tangenata izvedena čisto geometrijski s pomoću kubične elipse k^3 na ovome mjestu; drugi način izlazi iz polarne jednadžbe krivulje, čl. 10. Na ovaj je način ujedno određen položaj dvaju čunjeva njihovim vrhovima S' i S'' i prerezima c' i c'' u ravnini π. Čunjevi će u ovom položaju proizvesti kubičnu cirkularnu elipsu, koja ima sva svojstva navedena u čl. 5.

8. Nastojat ćemo odrediti projektivnim načinom kubičnu ovu elipsu iz hiperboloida Φ i reelnoga valjka, koji njom prolazi.

Po Bioche-evu zakonu[1] morat će ciklični prerez spomenutoga valjka s ravninom π prolaziti tačkom F. U sl. 2. opisan je iz tačke L_1 krug c, koji prolazi tačkom F. Budući da je $\overline{L_1F} = \overline{L_1D} = m_1$ a poradi $\overline{L_1S} = \overline{MV}$ i $\overline{SV} = \overline{SA''}$, bit će i $\overline{SM} = \overline{L_1A''} = m_1$; krug dakle c prolazi tačkama D, A'', F, A'. Svaka je od ovih tačaka probodište zrake, koja iz jedne tačke krivulje k^3 projicira drugu tačku njezinu. Otuda, što je $\overline{L_1D} = \overline{L_1D'} = m$, dalje otuda, što su A' i A'' probodišta zraka, koje prolaze tačkama S' i S'' paralelno s asimptotom p krivulje, vidi se, da je vrh onoga čunja, koji krivulju projicira u krug c na π, neizmjerno daleka reelna tačka krivulje R_∞. Prema tomu je krug c prerez valjka Ξ s ravninom π.

Iz Bioche-eva pravila izlazi, da su tačke O', F, O'', L_1 na istom krugu c_0. Za projektivno određenje kubične osobite elipse k^3 imamo ovaj postupak, ako opazimo, da se krugovi k i c sijeku ortogonalno:

U ravnini π najmanjega kruga k nekoga rotacionoga jednoplošnoga hiperboloida možemo po volji odabrati krug c, koji krug k siječe ortogonalno (u tačkama D i F). U središtu ćemo (L_1) toga kruga postaviti okomicu na ravninu π, koja plohu siječe u tačkama L i L'. Jedna od ovih tačaka spojena s tačkom

[1] Ch. Bioche, Sur les coniques qui sont les projections d'une cubique gauche, Nouv. ann. de Mathém. 1898. str. 546. Ovaj zakon glasi: „... Si l'on considère un système de cercles passant par un point (F), la condition nécessaire et suffisante pour que ces cercles soient les projections d'une cubique gauche est que leurs centres soient sur un cercle passant par F. Le centre de ce dernier cercle est le point d'intersection des plans osculateurs en F, B, C à toute cubique admettant comme projections les cercles du système". (U našem su slučaju B i C apsolutne tačke.)

Digitized by Google

D daje izvodnicu valjka, koji je njom i krugom c određen. Valjak će sjeći hiperboloid u krivulji trećega reda k^3, koja ima sva svojstva navedena u čl. 5. Dužina će m biti jednaka udaljenosti LD, a spojnica je L'D asimptota krivulje.

9. Dokazat ćemo, da je središte M kruga k izvanredni fokus ili središte krivulje k_1^3.

Budući da će po Czuberovu poučku[1] dvije tačke P_1 i P'_1 krivulje, u kojima je siječe tetiva povučena glavnom tačkom L_1, biti od tačke, koja je središte krivulje, jednako udaljene, uzet ćemo za određenje ovoga središta dvije osobite tetive kroz L_1, t. j. L_1F i L_1S. Budući da je L_1F tangenta krivulje k_1^3, bit će simetrala njezinih sjecišnih tačaka s krivuljom (koje su u F) polumjer MF kruga k. Budući pak da je S dvostruka tačka, a osim toga $SL_1 \perp p_1$, bit će SM simetrala za obje tačke, koje su ujedinjene u S. Tačka se dakle M upoznaje kao središte krivulje.

Tetive krivulje k_1^3, koje prolaze tačkom L_1, mogu se uzeti kao projekcije dvostrukih sekanata kubične krivulje k^3 na Φ, koje sijeku jednostavnu sekantu krivulje (LL'). Polovišta će ovih sekanata u projekciji biti na kružnici k', koja je opisana nad dijametrom ML_1. Vidi se dakle, da će sve ravnine simetrija za ove pojedine dvostruke sekante krivulje k^3 prolaziti tačkom M t. j. središtem hiperboloida, pa zato ovu tačku možemo nazvati središtem kubične krivulje k^3.

Dvostruke sekante ove krivulje, koje sijeku jednostavnu sekantu LL', određuju plohu drugoga reda Φ', koja prolazi krivuljom. Ta će ploha biti eliptični hiperboloid, za koji je kružnica k' ciklični prerez s ravninom najmanjega kruga k. Krug k' prolazi tačkama L_1, D, M, F i S.

Krivulja će se dakle k^3 moći dobiti i kao presjek obadvaju hiperboloida Φ i Φ', koji imaju zajedničku izvodnicu p. Uvjeti za ovo određenje bit će ovi. Krug k' hiperboloida Φ' mora prolaziti središtem hiperboloida Φ.

Projektivni će nizovi, koje određuju izvodnice hiperboloida Φ' na pravcu LL' i krugu k' biti u takovoj korespondenciji, da tački L_1 kruga korespondira ista tačka L_1 pravca LL', tački S kruga

[1] Czuber, Die Kurven 3. u. 4. Ordn., welche durch die unendlich fernen Kreispunkte gehen, Zeitschr. f. Math. 1887.; isp. dalje knjigu Loria, Spezielle alg. u. transc. ebene Kurven, str. 33.

Digitized by Google

neizmjerno daleka tačka pravca, tački D kruga ona tačka pravca, u kojoj ga siječe zajednička izvodnica p obadvaju hiperboloida, napokon tački F kruga ona tačka pravca, u kojoj ga siječe izvodnica hiperboloida Φ, koja prolazi tačkom F, a pripada sistemu t^i. —

Krivulja se k_1^3 kao racionalna cirkularna krivulja dade proizvesti po Czuberovu poučku iz pramena koncentričnih krugova (sa središtem M) i iz pramena zraka (sa središtem L_1), koji je s pramenom krugova projektivan. Poradi toga se krivulja k_1^3 prepoznaje kao osobita vrsta cirkularnih krivulja samo iz te vlastitosti, što je spojnica glavne njezine tačke (L_1) i dvostruke tačke (S) okomita na asimptoti (p_1).

Ova se vlastitost projekcije dade za krivulju k^3 na Φ tumačiti ovako. Asimptota je p_1 trag tangencijalne ravnine τ hiperboloida Φ u njegovoj tački D. Pravac je pak L_1S trag one ravnine σ, koja sadržava dvostruku sekantu s krivulje k^3 okomitu na ravnini najmanjega kruga, i tačku L, u kojoj ravnina τ siječe krivulju u konačnosti. Dakle:

Cirkularna će kubična elipsa na rotacionom hiperboloidu Φ imati sve vlastitosti navedene u čl. 5., ako je ispunjen taj jedini uvjet, da je ravnina σ okomita na ravnini τ. Konstantna će dužina m, koja se pojavljuje među spomenutim vlastitostima, biti jednaka udaljenosti osi hiperboloida od ravnine σ.

I s pomoću ovoga uvjeta $\sigma \perp \tau$ moći će se odrediti pojedine tačke kubične elipse k^3, ako se poslužimo prostornim tumačenjem Czuberova poučka za krivulju k_1^3. Ovo se proizvođenje može dobiti s pomoću koncentričnih kugala (iz M) i iz projektivnoga sistema izvodnicâ onoga hiperboloida, koji određuje krivulja k^3 s jednostavnom sekantom LL_1.

10. Uvedemo li za krivulju k_1^3 polarne koordinate, dobit ćemo iz jednadžbe u čl. 3.

$$(y + r)(x^2 + y^2) + 2m_1xy = 0$$

i iz

$$x = \rho \cos \omega, \quad y = \rho \sin \omega$$

polarnu jednadžbu krivulje

$$\rho = -\frac{r}{\sin \omega} - 2m_1 \cos \omega \ldots\ldots (2).$$

Digitized by Google

Ova se jednadžba može pisati i ovako:

$$\rho = \rho_1 + \rho_2,$$

gdje je $\rho_1 = -\frac{r}{\sin\omega}$, a $\rho_2 = -2m_1\cos\omega$.

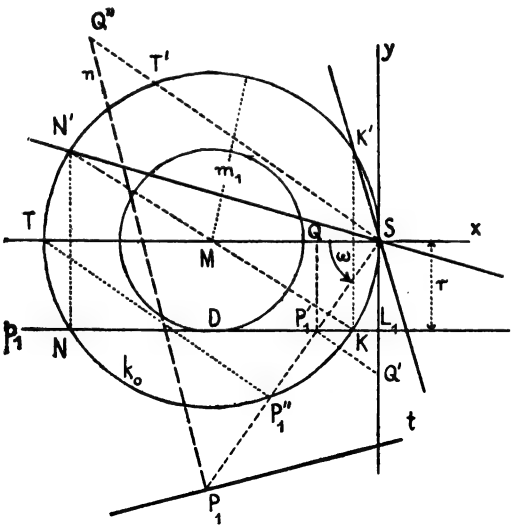
Prva je od ovih jednadžbi polarna jednadžba pravca

$$y = -r \quad \ldots\ldots (p_1),$$

a druga je polarna jednadžba kruga

$$(x + m_1)^2 + y^2 = m_1^2 \quad \ldots\ldots (k_0).$$

Krivulja je k_1^3 prema tomu konhoida sa dvije ravnalice p_1 i k_0. Pojedine se njezine tačke dadu iz jednadžbe (2) i s obzirom na (p_1) i (k_0) naći ovako (sl. 3.). Zadan je krug k_0 s polumjerom m_1 i pravac p_1 u udaljenosti r od središta M. Povući će se dijametar TS paralelno s pravcem p_1, pa će se tačka S uzeti kao ishodište polarnoga sustava. Tačkom se S može povući makar koji pravac, koji tvori sa TS kut ω. On će sjeći pravac p_1 u P_1', a krug k_0 u tački P_1''. Učini li se $\overline{SP_1}' = \overline{P_1''P_1}$, bit će $\overline{SP_1}' + \overline{P_1'P_1} = \overline{SP_1}' + \overline{SP_1''}$ suglasno s gornjom jednadžbom $\rho = \rho_1 + \rho_2$. Tačka je dakle P_1 jedna tačka krivulje k_1^3, a S dvostruka njezina tačka.



Sl. 3.

*

Digitized by Google

Za $\rho_1 = -\rho_2$ bit će $\rho = 0$, dakle $\omega > \frac{\pi}{2}$. Tangente se u dvostrukoj tački mogu dobiti, ako se u sjecišnim tačkama K i N pravca p_1 sa k_0 postave okomice na MS, potraže njihova sjecišta K' i N' sa k_0 i povuku spojnice $K'S$ i $N'S$. Vidi se, da su ove tangente simetrične prema vektoru, za koji je amplituda $\omega = -45^0$.

Konstrukcija je krivulje iz njezine polarne jednadžbe zato osobito zgodna, jer iz nje izlazi vrlo jednostavna konstrukcija tangente u makar kojoj tački.[1]

Stvorimo li iz polarne jednadžbe izraz za polarnu subnormalu, imat ćemo:

$$\frac{d\rho}{d\omega} = \frac{r\cos\omega}{\sin^2\omega} + 2m_1 \sin\omega$$

$$= \frac{r}{\sin\omega} \operatorname{cotg}\omega + 2m_1 \sin\omega.$$

Budući da je $\frac{r}{\sin\omega} = SP_1'$, dobit će se $SP_1' \operatorname{cotg}\omega = P_1'Q'$, ako se na vektor SP_1 u njegovu sjecištu P_1' sa p_1 postavi okomica, koja siječe y u Q'.

Dužina je $2m_1 . \sin\omega = TP_1''$. Okomica na vektor SP_1 u tački S siječe krug k_0 u tački T', pa budući da je $TP_1''S$ pravi kut, bit će $ST' = TP_1''$.

Subnormala je dakle za tačku P_1 sastavljena od dužina ST' i $T'Q'' = P_1'Q'$.

Na taj je način određena tangenta u tački P_1 krivulje k_1^3, pa će se s njezinom pomoći konstruirati i tangenta u pripadnoj tački prostorne krivulje k^3.

11. Proračunat ćemo ploštinu krivulje k_1^3 iz njezine polarne jednadžbe

$$\rho = -\frac{r}{\sin\omega} - 2m\cos\omega,^2$$

[1] Loria primjećuje, da bi se na ovaj način, koji sam mu priopćio za proizvođenje nove krivulje k_1^3, mogla izvesti reelna konstrukcija za cijelu familiju osobitih racionalnih cirkularnih krivulja. To se u istinu dade izvesti iz polarne jednadžbe (2), pa ću se na ovo pitanje pobliže svratiti u posebnoj raspravi.

[2] Mjesto m_1 možemo sada zgodnije pisati m, jer se radi samo o ravničnoj krivulji.

Digitized by Google

a pretpostavljamo ponajprije, da je dvostruka tačka S' krivulje izolirana (sl. 1.), dakle da je $r > m$. Odredit ćemo ploštinu λ onoga dijela ravnine, koji je između pravca p_1 i krivulje samo na lijevoj strani od tačke L_1, pa će se zato morati od plošine, što je čini krivulja s vektorom $S'M$, oduzeti ploština između ovoga vektora i pravca p_1. Jednadžba je pravca p_1

$$\rho_1 = -\frac{r}{\sin\omega};$$

ploština će dakle biti

$$\lambda = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\rho^2 - \rho_1^2)\, d\omega.$$

Dobit ćemo dalje

$$\lambda = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^2}{\sin^2\omega} + \frac{4rm\cos\omega}{\sin\omega} + 4m^2\cos^2\omega - \frac{r^2}{\sin^2\omega} \right) d\omega,$$

ili

$$\lambda = 2rm\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{cotg}\omega\, d\omega + 2m^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\omega\, d\omega =$$

$$= 2rm\left[l\sin\omega\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2m^2\left[\frac{\omega}{2} + \frac{\sin 2\omega}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}},$$

to jest

$$\lambda = +2rm \cdot \infty + \frac{m^2\pi}{2}.$$

Da se pak odredi ploština λ' onoga dijela ravnine, koji je između krivulje i pravca p_1 na desno od tačke L_1, morat će se od ploštine između makar koja dva vektora i pravca p_1 oduzeti ploština krivulje, koja je između ista dva vektora; bit će dakle

$$\lambda' = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\rho_1^2 - \rho^2)\, d\omega,$$

Digitized by Google

ili

$$\lambda' = -2rm\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\operatorname{cotg}\omega d\omega - 2m^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^2\omega d\omega =$$

$$= -2rm\left[l\sin\omega\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - 2m^2\left[\frac{\omega}{2}+\frac{\sin 2\omega}{4}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi},$$

dakle

$$\lambda' = +2rm\,.\,\infty - \frac{m^2\pi}{2}.$$

Hoćemo li da stvorimo razliku λ—λ', morat ćemo poradi neizmjerno velikih prvih članova u λ i λ' posegnuti za granicom razlike onih integrala, iz kojih su postale ove neizmjerne veličine.

Ako je ε makar kako malena veličina, imat ćemo, da je

$$\lim_{\varepsilon=+0}\left[2rm\left(-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varepsilon}\operatorname{cotg}\omega d\omega+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\varepsilon}\operatorname{cotg}\omega d\omega\right)\right]=0,$$

dakle

$$\lambda - \lambda' = m^2\pi.$$

Posve će isti postupak ostati za određenje ploštine, ako krivulja ima u tački S šiljak, pa se vidi, da je posljednji resultat nezavisan o veličini r.

Možemo dakle reći:

Apsolutna vrijednost za algebarsku razliku onih dvaju dijelova ploštine, što je krivulja čini sa svojom asimptotom, koji su na raznim stranama asimptote, bit će u slučaju, da krivulja ima izoliranu dvostruku tačku ili šiljak, jednaka ploštini kruga k_0.

Potraži li se ploština μ, što je čini krivulja s asimptotom na lijevo od L_1 za vektore, koji odgovaraju amplitudama $\omega = 45^0$ i $\omega = 90$, a na isti način ploština μ' desno od L_1 za amplitude $\omega = 90$ i $\omega = 135$, dobit će se:

Digitized by Google

$$\mu = 2rm \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{cotg}\omega\, d\omega + 2m^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\omega\, d\omega =$$

$$= -2rm \,.\, l\sin 45^0 + \frac{m^2\pi}{4} - \frac{m^2}{2}$$

i

$$\mu' = -2rm \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \operatorname{cotg}\omega\, d\omega - 2m^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos^2\omega\, d\omega =$$

$$= -2rm \,.\, l\cos 45^0 - \frac{m^2\pi}{4} + \frac{m^2}{2}.$$

Bit će dakle

$$\mu - \mu' = \frac{m^2\pi}{2} - m^2,$$

dakle resultat opet nezavisan o veličini r.

Razlika je ploštinâ μ i μ' jednaka ploštini leće, što je čine dva kvadranta temeljnoga kruga k_0.

Vidi se naprotiv, da će zbroj $\mu + \mu' = 2rm \,.\, l2$ biti o veličini r zavisan.

U slučaju, kad je $\lambda < m$, t. j. kad krivulja k_1^3 ima u S prijevoj, bit će ploština njezina na desno od tačke L_1 sastavljena od tri dijela. Dva se određuju onako, kao i ploština za λ', treći je ploština samoga prijevoja. Umanjuje li se apsolutna veličina r, konvergirat će vrijednost ukupne ploštine na desno od L_1 prema $-\frac{m^2\pi}{2}$, pa će napokon za $r = 0$ biti ploština lijevoga i desnoga dijela $m^2\pi$, jer će u ovom slučaju krivulja k_1^3 degenerirati u krug k_0 i pravac SM, koji se ima opet uzeti kao asimptota degenerirane krivulje.

Iz svega se vidi velika sličnost među vlastitostima ove krivulje k_1^3 i Nikomedove konhoide, koja je četvrtoga reda.

Mnoge druge njezine osobitosti (n. pr. pravac, koji sadržava tri infleksione tačke), moći će se lako odrediti konstruktivnim načinom iz prostorne kubične krivulje k^3.

Digitized by Google

Résumé.

Dans le mémoire: „Sur une ellipse cubique circulaire et sa projection“ on donne quelques relations entre les deux courbes, en partant d'une définition métrique de la première qui est située sur un hyperboloïde de rotation à une nappe Φ.

Étant donnée une génératrice quelconque p sur cet hyperboloïde, les points où les génératrices t^i de l'autre système coupent la première, soient T^i. Si l'on porte, en partant de ces points T^i sur les génératrices correspondantes du système t^i dans le même sens une longueur constante m, les points extrêmes P^i de ces longueurs seront sur une ellipse gauche k^3, dont la génératrice p sera l'asymptote.

Si l'on projette cette ellipse gauche sur le plan du cercle de gorge k (fig. 1) de l'hyperboloïde, on obtiendra une cubique k_1^3 ayant pour équation

$$y^3 - 2ry^2 + (r^2 + x^2 - m_1^2)\, y - 2rm_1\, (x - m_1) = 0$$

où la projection (p_1) de la génératrice p et le rayon (r) de contact de celle-ci avec le cercle de gorge k sont les axes coordonnés rectangulaires des x et y. La projection constante de la longueur m est désignée par m_1.

La courbe k_1^3 possède un point double $S\ (m_1,\ r)$ réel dans tous les trois cas possibles $r \lessgtr m_1$.

En prenant pour origine le point double S, les axes coordonnés étant parallèles aux axes primitifs, l'équation de la courbe prendra la forme nouvelle:

$$(y + r)\ (x^2 + y^2) + 2m_1 xy = 0.$$

La cubique k_1^3 plane étant alors une courbe circulaire unicursale, la cubique gauche k^3 le sera aussi. Une telle courbe

Digitized by Google

sera déterminée sur l'hyperboloide par les deux points ombilicaux du plan qui est perpendiculaire à l'axe de l'hyperboloïde et par deux autres points quelconques de la surface Φ.

Il y a au plus huit ellipses gauches (réelles et imaginaires), qui passent par ces deux points sur l'hyperboloïde, ayant toutes les propriétés de la courbe gauche k^3 considérée primitivement.

On obtiendra la courbe k^3 comme intersection mutuelle de deux quadriques. L'une de celles-ci sera l'hyperboloïde Φ, l'autre sera un cylindre, ayant avec Φ une génératrice (p) commune et, par conséquent, l'un des systèmes des sections cycliques perpendiculaire à l'axe de l'hyperboloïde. Le cercle de ce système qui est situé dans le plan du cercle de gorge coupe ce dernier orthogonalement. L'intersection de ces deux surfaces aura toutes les propriétés de la courbe primitive k^3.

En considérant la courbe k_1^3 comme projection de la courbe gauche k^3, on obtiendra, en s'aidant des propriétés projectives de cette dernière, la construction des tangentes en point double S à la première.

On ménera du point double les deux tangentes au cercle k (fig. 2) et on joindra les points d'intersection I, K de ces tangentes avec la droite p_1 au centre M du cercle k. Les tangentes cherchées en S sont parallèles aux droites de jonction IM et KM.

Soit s la sécante double d'une courbe k^3 circulaire sur Φ, passant par le point à l'infini de l'axe de l'hyperboloïde, puis soit τ le plan tangent à l'hyperboloïde, passant par la génératrice p et étant parallèle à l'axe de la surface. Le plan τ coupe la courbe en un point fini L. Le plan τ et le plan (sL) peuvent être perpendiculaires entre eux. C'est la condition unique et suffisante pour que la courbe k^3 ait toutes les propriétés de la courbe gauche proposée.

Les plans, ménés par les milieux des cordes doubles de la cubique gauche perpendiculairement à ces cordes, passent par le centre M de l'hyperboloïde. Or, ce point sera le point central de la cubique gauche. D'après un théorème connu, dû à Czuber, ce même point sera le centre de la cubique plane k_1^3.

Si l'on transforme la deuxième des équations précédentes de la cubique k_1^3 en equation

Digitized by Google

$$\rho = -\frac{r}{\sin\omega} - 2m_1\cos\omega,$$

on verra que cette équation n'est qu'une somme de deux équations

$$\rho = -\frac{r}{\sin\omega} \quad \text{et} \quad \rho_2 = -2m_1\cos\omega$$

dont la première est la droite p_1 et la seconde le cercle k_0, décrit du point M comme centre avec le rayon, étant égal à la longueur donnée m_1. La courbe plane k_1^3 est alors une conchoïde à deux directrices p_1 et k_0 (fig. 3). Si l'on mène (par le pôle S) un rayon vecteur quelconque SP_1 qui coupe la droite p_1 en P_1' et le cercle k_0 en P_1'', et si l'on fait $SP_1' = P_1''P_1$, on obtiendra en P_1 un point de la courbe. Celle-ci, construite de cette manière, aura toutes les propriétés de la courbe considérée k_1^3.

Nous nous proposons de construire la tangente t au point P_1 à la courbe k_1^3. Il résulte de l'équation

$$\frac{d\rho}{d\omega} = \frac{r\cos\omega}{\sin^2\omega} + 2m_1\sin\omega =$$

$$= \frac{r}{\sin\omega}\cdot\operatorname{cotg}\omega + 2m_1\sin\omega,$$

la construction suivante de cette tangente.

La perpendiculaire SQ'' en S sur SP_1 coupe le cercle k_0 en T'. Si l'on mène une perpendiculaire en P' sur SP_1 qui coupe y en Q' et si l'on porte la longueur $P_1'Q'$ sur SQ'' de sorte que $T'Q''$ soit égal à $P_1'Q'$, on obtiendra un point de la normale en P_1 or, la tangente cherchée sera une perpendiculaire en P_1 sur P_1Q''.

Les points N' et K' étant deux sommets du parallélogramme rectangulaire inscrit au cercle k_0, dont les deux autres sommets sont les points connus N et K (les points communs à p_1 et à k_0), les tangentes en point double S sont les droites de jonction des points N' et K' avec le point S. —

On peut distinguer deux parties de l'aire, enfermée par la courbe et son asymptote, à gauche et à droite du point L_1 commun fini à la courbe et à l'asymptote (p_1).

Digitized by Google

La différence des aires de l'une et l'autre partie sera pour les deux cas $r \gtrless m_1$ égale à l'aire du cercle fondamental k_0. Si l'on considère seulement les deux parties de l'aire entre les rayons vecteurs appartenant aux valeurs $\omega = 45^0$ et 90^0 et $\omega = 90^0$ et 135^0, la difference de ces aires sera $\frac{m_1^2\pi}{2} - m_1^2$ or, elle sera égale à l'aire lenticulaire, limitée par deux quarts du cercle fondamental.

Le cas où on a $r < m_1$, exige une évaluation particulière de l'aire à droite du point L_1 qui n'a pas d'intérêt remarquable. Nous ajoutons seulement qu'en cas où $+r$ devient zéro, la cubique k_1^3 dégénère en cercle fondamental et en diamètre SM.

Digitized by Google

O nekim aritmetičnim funkcijama.

Primljeno u sjednici matematičko-prirodoslovnoga razreda Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti dne 7. svibnja 1904.

Napisao dr. Stjepan Bohniček.

Ernest Cesáro promatra[1] četiri aritmetične funkcije[2] $f(n)$, $g(n)$, $F(n)$, $G(n)$, među kojima postoje snošaji:

$$F(n) = \sum_{d}^{n} f(d), \quad G(n) = \sum_{d}^{n} g(d); \tag{1}$$

$\sum_{d}^{n}$ znači zbroj protegnut na sve divizore d broja n. Iz tih snošaja izvodi, da vrijedi također jednadžba:

$$\sum_{d}^{n} G(d)\, f\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d}^{n} g(d)\, F\left(\frac{n}{d}\right). \tag{2}$$

Spretnim uvođenjem posebnih funkcija za $f(n)$ i $g(n)$ dobiva iz te jednadžbe raznovrsne zanimljive snošaje među aritmetičnim funkcijama.

Mi ćemo obrnuto poći od jednadžbe (2) bez obzira na to, da li postoje relacije (1) ili ne, pa istražiti svezu među funkcijama $f(n)$, $g(n)$, $F(n)$, $G(n)$. Prema tomu će biti relacije, što ih dobiva Cesáro, samo posebni slučajevi relacija, što ćemo ih mi naći, a poradi metode, kojom ćemo se služiti, past će i na njih jasnija svjetlost.

---

[1] Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège, 2. série, t. 10.

[2] Zahlentheoretische, numerische Functionen, fonctions arithmétiques.

Digitized by Google

Uzmimo dakle, da među aritmetičnim funkcijama $c(n)$, $c_1(n)$, $C(n)$, $C_1(n)$ postoji jednadžba:

$$(3) \qquad \sum_d^n C(d)\, c\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_d^n C_1(d) c_1\left(\frac{n}{d}\right).$$

Jasno je, da se svaka od tih funkcija dade jednoznačno odrediti, ako su poznate ostale tri. Prva će nam biti zadaća, da odredimo jednu od njih n. pr. $C_1(n)$ s pomoću ostalih triju. Da si olakšamo posao, poći ćemo od jednostavnije jednadžbe:

$$(4) \qquad F(n) = \sum_d^n C_1(d) c_1\left(\frac{n}{d}\right),$$

koja u (3) prelazi, ako stavimo:

$$F(n) = \sum_d^n C(d)\, c\left(\frac{n}{d}\right),$$

pa iz nje potražiti $C_1(n)$.

Neka bude poradi jednostavnosti:

$$c_1(1) = 1, \quad F(1) = 1.$$

Razvijmo sada (4) redom za $n = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$

Dobit ćemo:

$$F(1) = C_1(1)\, c_1(1),$$
$$F(2) = C_1(1)\, c_1(2) + C_1(2)\, c_1(1),$$
$$F(3) = C_1(1)\, c_1(3) + C_1(3)\, c_1(1),$$
$$F(4) = C_1(1)\, c_1(4) + C_1(2)\, c_1(2) + C_1(4)\, c_1(1),$$
$$F(5) = C_1(1)\, c_1(5) + C_1(5)\, c_1(1),$$
$$F(6) = C_1(1)\, c_1(6) + C_1(2)\, c_1(3) + C_1(3)\, c_1(2) + C_1(6)\, c_1(1),$$
$$- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -$$

Iz njih izvodimo:

Digitized by Google

$$\begin{aligned}
C_1(1) &= \quad F(1),\\
C_1(2) &= -F(1)\,c_1(2) + F(2)\,c_1(1),\\
C_1(3) &= -F(1)\,c_1(3) + F(3)\,c_1(1),\\
C_1(4) &= \quad F(1)[-c_1(4) + c_1(2)\,c_1(2)] - F(2)\,c_1(2) + F(4)\,c_1(1),\\
C_1(5) &= -F(1)\,c_1(5) + F(5)\,c_1(1),\\
C_1(6) &= \quad F(1)[-c_1(6) + c_1(3)c_1(2) + c_1(2)c_1(3)] - F(2)c_1(3) -\\
&\qquad - F(3)c_1(2) + F(6)c_1(1),\\
&- ;
\end{aligned}$$

$c_1(1)$ ostavljeno je namjerice u jednadžbama; isto tako nijesu stegnuta zadnja dva člana u uglatoj zagradi u zadnjoj jednadžbi, da se lakše pregleda zakon, po kojem su građene desne strane.

Što više tih jednadžbi razvijemo, to ćemo se više uvjeravati o ispravnosti relacije:

$$(5) \qquad C_1(n) = \sum_d^n F(d)\, \sigma c_1\left(\frac{n}{d}\right);$$

pod $\sigma c_1(m)$ treba razumjeti polinom, koji se dobije tako, da odredimo sve varijacije s ponavljanjem k produktu m, pa faktore pojedinih varijacija načinimo argumentima funkcije c, tako dobivene vrijednosti funkcije c za svaku varijaciju među sobom pomnožimo, a pred umnožak stavimo znak + ili — prema tomu, da li je varijacija, iz koje je produkt načinjen, pripadala k takomu ili lihomu razredu, napokon sve dobivene izraze sažmemo; napose je $\sigma c_1(1) = 1$.

Tako imamo n. pr. k produktu 12 ove varijacije s ponavljanjem:

12, 4 . 3, 3 . 4, 6 . 2, 2 . 6, 2 . 2 . 3, 2 . 3 . 2, 3 . 2 . 2,

a prema tomu:

$$\begin{aligned}
\sigma c_1(12) &= -c_1(12) + c_1(4)c_1(3) + c_1(3)c_1(4) + c_1(6)c_1(2) + c_1(2)c_1(6) -\\
&- c_1(2)c_1(2)c_1(3) - c_1(2)c_1(3)c_1(2) - c_1(3)c_1(2)c_1(2).
\end{aligned}$$

Jednadžba (5) vrijedi u razvijenim slučajevima. Stoga se možemo, da dokažemo njenu općenu valjanost, poslužiti potpunom indukcijom. Uzmimo, da ona vrijedi za sve brojeve, koji su manji od n; lako ćemo dokazati, da ona vrijedi i za n.

Ponajprije možemo (4) napisati i ovako:

Digitized by Google

$$C_1(n) = F(n) - \sum_{d<n}^{n} C_1(d)\ c_1\left(\frac{n}{d}\right),$$

gdje u zbroju, kako je označeno, d treba da prođe sve divizore broja n manje od n. Stoga ćemo poradi učinjene pretpostavke moći na sve funkcije $C_1(d)$ u tom zbroju primijeniti jednadžbu (5), pa napisati:

$$C_1(n) = F(n) - \sum_{d<n}^{n} c_1\left(\frac{n}{d}\right) \sum_{t}^{d} F(t)\, \sigma c_1\left(\frac{d}{t}\right).$$

Budući da d prolazi sve divizore broja n manje od n, proći će ih i t. Da dokažemo stavak (5), treba samo da pokažemo, da je faktor, kojim je u zadnjoj jednadžbi pomnožen $F(t)$, jednak $\sigma c_1\left(\frac{n}{t}\right)$, kako jedadžba (5) zahtijeva. Za $t = n$ vidi se to neposredno; ako je pak $t < n$, razabiramo lako, da je $F(t)$ pomnoženo izrazom:

$$-\sum c_1\left(\frac{n}{d}\right) \sigma c_1\left(\frac{d}{t}\right),$$

u kom treba d da prođe sve divizore broja n, koji su mnogokratnici broja t, a manji od n. No taj izraz baš ne daje ništa drugo nego $\sigma c_1\left(\frac{n}{t}\right)$. Ponajprije je naime jasno, da je svaki član toga izraza također član izraza $\sigma c_1\left(\frac{n}{t}\right)$, jer je $\frac{n}{d}$ divizor broja $\frac{n}{t}$, i da u $\sigma c_1\left(\frac{n}{t}\right)$ drukčije građenih članova nema. Izlučimo li pak iz svih članova izraza $\sigma c_1\left(\frac{n}{t}\right)$, koji sadržavaju faktor $c_1\left(\frac{n}{d}\right)$, taj faktor $c_1\left(\frac{n}{d}\right)$, bit će izraz, kojim je $c_1\left(\frac{n}{d}\right)$ pomnožen, očito $-\sigma c_1\left(\frac{d}{t}\right)$. Tim je ispravnost jednadžbe (5) za svaki n dokazana.

Stavimo li sada:

Digitized by Google

$$F(n) = \sum_{d}^{n} C(d)\, c\left(\frac{n}{d}\right).$$

prijeći će (4) u (3), a (5) će glasiti u tom slučaju ovako:

$$(6) \qquad C_1(n) = \sum_{d}^{n} \sigma c_1 \left(\frac{n}{d}\right) \sum_{t}^{d} C(t)\, c\left(\frac{d}{t}\right)$$

ili također:

$$(6) \qquad C_1(n) = \sum_{d}^{n} C\left(\frac{n}{d}\right) \sum_{t}^{d} c(t)\, \sigma c_1 \left(\frac{d}{t}\right).$$

Svagdje ćemo u ovoj radnji uzeti, da je $C(1) = 1$, $c(1) = 1$.

Prije nego prijeđemo k promatranju posebnih slučajeva, promotrit ćemo nekoliko osobitih svojstava operacije σ.

Uzmimo, da postoji jednadžba:

$$\sigma\, c(n) = c(n)$$

za svaki n. Lako ćemo se uvjeriti, da je onda:

$$c(1) = 1, \quad c(n) = 0 \quad \text{za} \quad n > 1.$$

Treba samo jednadžbu razviti redom za $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ pa poslužiti se potpunom indukcijom.

Nadalje ćemo pokazati, da operacija σ, dvaput primijenjena na kojugod aritmetičnu funkciju $c(n)$, funkciju ne mijenja; dakle da je $\sigma\,[\sigma c(n)]$ ili pokraćeno pisano:

$$\sigma^2 c(n) = c(n).$$

Za tu ćemo se svrhu poslužiti aritmetičnom funkcijom $\varepsilon(n)$, za koju vrijede jednadžbe:

$$\varepsilon(1) = 1, \quad \varepsilon(n) = 0 \quad \text{za} \quad n > 1.$$

Uvijek se može staviti:

Digitized by Google

$$c(n) = \sum_{d}^{n} \varepsilon(d) c\left(\frac{n}{d}\right).$$

Obazremo li se na jednadžbe (4) i (5), izvest ćemo odatle relaciju:

$$(7) \qquad \varepsilon(n) = \sum_{d}^{n} c(d)\, \sigma c\left(\frac{n}{d}\right)$$

ili drukčije pisano:

$$(7^*) \qquad \sum_{d}^{n} c(d)\, \sigma c\left(\frac{n}{d}\right) = \begin{cases} 1 & \text{za } n = 1, \\ 0 & \text{„ } n > 1. \end{cases}$$

Iz (7) izvodimo opet prema (4) i (5), da je:

$$c(n) = \sum_{d}^{n} \varepsilon(d)\, \sigma^2 c\left(\frac{n}{d}\right)$$

ili poradi definicije funkcije $\varepsilon(n)$:

$$(8) \qquad \sigma^2 c(n) = c(n).$$

Uopće se nijedna aritmetična funkcija ne promijeni, ako se ona podvrgne tak broj puta operaciji σ, a lih broj puta primijenjena operacija σ ima isti učinak, kao jedanput primijenjena.

Postoji li jednadžba:

$$(9) \qquad c(n) = \sigma c_1(n),$$

izvest ćemo iz nje na temelju relacije (8) i ovu:

$$(9^*) \qquad \sigma c(n) = c_1(n).$$

Da izvedemo novu osobito važnu relaciju značajnu za operaciju σ, poći ćemo od identične jednadžbe:

Digitized by Google

$$\sum_{d}^{n} f(d) = \sum_{d}^{n} f\left(\frac{n}{d}\right)$$

koja izlazi iz (3), ako se stavi:

$$C(n) = f(n),\ c(n) = 1;\ C_1(n) = 1,\ c_1(n) = f(n).$$

Uvrstimo li te vrijednosti u (6), dobit ćemo:

$$(10) \qquad 1 = \sum_{d}^{n} f(d) \sum_{t}^{\frac{n}{d}} \sigma f(t) = \sum_{d}^{n} \sigma f(d) \sum_{t}^{\frac{n}{d}} f(t)$$

za svaku aritmetičnu funkciju $f(n)$.

Izvest ćemo još jednu općenu relaciju s pomoću operacije σ. Pitamo se, kakva sveza postoji među izrazima:

$$\sum_{d}^{n} c(d)\, \sigma c_1\left(\frac{n}{d}\right),\ \sum_{d}^{n} c_1(d)\, \sigma c\left(\frac{n}{d}\right)?$$

Uvest ćemo pokrate:

$$(11) \quad \chi(n) = \sum_{d}^{n} c(d)\, \sigma c_1\left(\frac{n}{d}\right),\ \chi_1(n) = \sum_{d}^{n} c_1(d)\, \sigma c\left(\frac{n}{d}\right).$$

Na temelju jednadžbi (4), (5), (8) izvodimo odatle, da je:

$$c(n) = \sum_{d}^{n} \chi(d)\, c_1\left(\frac{n}{d}\right),\ c_1(n) = \sum_{d}^{n} \chi_1(d)\, c\left(\frac{n}{d}\right).$$

Stavimo li sada u prvu od tih jednadžbi za $c_1(n)$ vrijednost prema drugoj, izići će:

$$c(n) = \sum_{d}^{n} \chi(d) \sum_{t}^{\frac{n}{d}} \chi_1(t)\, c\left(\frac{n}{dt}\right).$$

Digitized by Google

Napišimo za čas:

$$\psi\left(\frac{n}{d}\right)=\sum_{t}^{\frac{n}{d}} \chi_1(t)c\left(\frac{n}{dt}\right),$$

pa ćemo moći predzadnju jednadžbu napisati ovako:

$$c(n)=\sum_{d}^{n} \chi(d)\psi\left(\frac{n}{d}\right).$$

Iz te jednadžbe izvodimo dalje, da je:

$$\psi(n)=\sum_{d}^{n} c(d)\,\sigma\chi\left(\frac{n}{d}\right)$$

ili, ako za $\psi(n)$ napišemo njegovu vrijednost:

$$\sum_{d}^{n} c(d)\chi\left(\frac{n}{d}\right)=\sum_{d}^{n} c(d)\,\sigma\chi\left(\frac{n}{d}\right),$$

a odatle se zaključuje, ako jednadžbu razvijemo redom za $n=1, 2, 3, \ldots$, da između $\chi(n)$ i $\chi_1(n)$ postoji snošaj:

$$(11^*) \qquad \chi_1(n)=\sigma\chi(n) \quad \text{ili} \quad \chi(n)=\sigma\chi_1(n).$$

Pošto smo se upoznali s bitnim svojstvima operacije σ, bit će nam veoma lako izvesti Cesárov stavak, po kojem izlazi iz jednadžbi (1) jednadžba (2). U istinu dobivamo iz (1) prema (4) i (5), ako u (4) i (5) stavimo $C_1(n)=1$:

$$1=\sum_{d}^{n} F(d)\sigma f\left(\frac{n}{d}\right),$$

$$1=\sum_{d}^{n} G(d)\sigma g\left(\frac{n}{d}\right).$$

*

Digitized by Google

Dakle je:

$$\sum_{d}^{n} F(d)\sigma f\left(\frac{n}{d}\right) \quad \sum_{d}^{n} G(d)\sigma g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Odatle dobivamo prema (3) i (6), ako stavimo:

$$C(n) = F(n), \quad c(n) = \sigma f(n), \quad C_1(n) = G(n), \quad c_1(n) = \sigma g(n),$$

te se obazremo na (8), ponajprije ovu jednadžbu:

$$G(n) = \sum_{d}^{n} F\left(\frac{n}{d}\right) \sum_{t}^{d} g(t)\,\sigma f\left(\frac{d}{t}\right).$$

S pomoću (4) i (5) zaključujemo dalje, da je:

$$\sum_{d}^{n} g(d)\,\sigma f\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d}^{n} G(d)\,\sigma F\left(\frac{n}{d}\right),$$

a s obzirom na (3) i (6) izlazi iz te jednadžbe ova:

$$g(n) = \sum_{d}^{n} \sigma F\left(\frac{n}{d}\right) \sum_{t}^{d} G(t) f\left(\frac{d}{t}\right).$$

Iz nje izvodimo napokon traženu relaciju:

$$\sum_{d}^{n} G(d)\, f\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d}^{n} g(d)\, F\left(\frac{n}{d}\right).$$

Tako je Cesárova relacija iznova na osobit način dokazana. No možemo još i više pokazati s pomoću uvedene metode. Ako postoji relacija:

$$(2) \qquad \sum_{d}^{n} G(d)\, f\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d}^{n} g(d)\, F\left(\frac{n}{d}\right),$$

Digitized by Google

a n. pr. za funkcije $G(n)$, $g(n)$ valja jednadžba:

$$(2^*) \qquad G(n) = \sum_d^n g(d),$$

to stoje i funkcije $F(n)$, $f(n)$ u svezi:

$$F(n) = \sum_d^n f(d).$$

U istinu možemo iz (2) izvesti jednadžbu:

$$F(n) = \sum_d^n f(d) \sum_t^{\frac{n}{d}} G(t) \sigma g\left(\frac{n}{dt}\right),$$

no poradi pretpostavke (2*) mora biti

$$\sum_d^n G(d) \sigma g\left(\frac{n}{d}\right) = 1$$

za svaki n. Dakle je:

$$F(n) = \sum_d^n f(d).$$

Opće jednadžbe, što smo ih dosad izveli, neiscrpljivo su vrelo najraznovrsnijih relacija među aritmetičnim funkcijama. Navest ću samo nekoliko jednostavnih primjera.

Uvedemo li u (7) ili (7*) za $c(n)$ funkciju 1^n, dobit ćemo snošaj:

$$\sum_d^n \sigma(1^d) = \begin{cases} 1 & \text{za} \quad n = 1, \\ 0 & \text{„} \quad n > 1. \end{cases}$$

Digitized by Google

Za $\sigma(1^n)$ uvest ćemo znak:

$$\sigma(1^n) = \mu(n).$$

Tu je oznaku prvi upotrebio gospodin Mertens[1]. Onda možemo također napisati, da je:

$$(12) \qquad \sum_{d}^{n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{za} \quad n = 1, \\ 0 & \text{„} \quad n > 1. \end{cases}$$

Funkcija $\mu(n) = \sigma(1^n)$ podaje nam očevidno razliku među brojem varijacija s ponavljanjem k produktu n u takim razredima i brojem varijacija u lihim razredima. Želimo li naći tu razliku, treba samo odrediti funkciju $\mu(n)$ s pomoću jednadžbe (12), kojom je ta funkcija definirana. Lako se nađe potpunom indukcijom, da je za broj:

$$n = p_1 p_2 p_3 \ldots\ldots p_r,$$

ako su $p_1, p_2, p_3, \ldots . p_r$ sve sami različiti prosti brojevi,

$$\mu(p_1 p_2 p_3 \ldots . p_r) = (-1)^r,$$

a inače, ako je n makar samo jednim kvadratom kojega prostoga broja djeljiv, da je:

$$\mu(n) = 0.$$

Tako smo dokazali, da je za svaki n, koji je kvadratom kojega prostoga broja djeljiv, broj varijacija s ponavljanjem k produktu n u takim razredima jednak broju varijacija u lihim razredima, ako li je n samo prvim potencijama prostih brojeva djeljiv, da taki razredi sadržavaju za jednu varijaciju više nego lihi, ako je u n sadržan tak broj prostih brojeva, a za jednu manje nego lihi, ako je u n sadržan lih broj prostih faktora.

Taj je stavak na drugi način prvi dokazao Möbius[2]. Mi ćemo mu dodati nov stavak.

Pomislimo između varijacija s ponavljanjem k produktu n izvađene one, kojima su faktori djeljivi samo prvim potencijama

[1] Crelle: Journal für Math. Bd. 77.
[2] Crelle: Journal für Math. Bd. 9.

Digitized by Google

prostih brojeva; onda će u takim razredima biti takovih varijacija jedna više ili jedna manje nego u lihim prema tomu, da li je broj svih, bilo jednakih bilo nejednakih, prostih brojeva sadržanih u n tak ili lih.

Da taj stavak dokažemo, poslužit ćemo se funkcijom $\mu^2(n)$. Jasno je, da nam traženu razliku među brojem varijacija u takim i lihim razredima podaje $\sigma\mu^2(n)$. Treba dakle samo odrediti tu funkciju. Obilježit ćemo sa $\alpha(n)$ broj svih, bilo jednakih bilo različitih, prostih brojeva sadržanih u n. Ako je dakle:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \ldots\ldots p^{\alpha_r},$$

to nam je:

$$\alpha(n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots\ldots + \alpha_r;$$

napose neka bude $\alpha(1) = 0$.

Onda je poradi razvijenih svojstava funkcije $\mu(n)$:

$$\mu^2(n) = (-1)^{\alpha(n)}\mu(n) \tag{13}$$

za svaki broj n. No budući da je za dva koja mu drago broja m, n:

$$\alpha(m)\ \alpha(n) = \alpha(m) + \alpha(n),$$

to je:

$$\sigma\mu^2(n) = \sigma\left[(-1)^{\alpha(n)}\mu(n)\right] = (-1)^{\alpha(n)}\sigma\mu(n).$$

Kako je pak po definiciji bilo:

$$\mu(n) = \sigma(1^n),$$

to je prema (9) i (9*):

$$\sigma\mu(n) = 1,$$

a stoga:

$$\sigma\mu^2(n) = (-1)^{\alpha(n)}.$$

Tim je naš stavak dokazan.

Tako imamo n. pr. za $n = p_1 p_2^2$ ove varijacije promatrane vrste:

$$p_1 p_2 \cdot p_2, \quad p_2 \cdot p_1 p_2,$$
$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_2, \quad p_2 \cdot p_1 \cdot p_2, \quad p_2 \cdot p_2 \cdot p_1.$$

Digitized by Google

Pošto smo promotrili glavna svojstva funkcije $\mu(n)$, spomenuti nam je, da za svaku aritmetičnu funkciju $c(n)$, za koju valja jednadžba:

$$c(m)\ c(n) = c(mn),$$

postoji relacija:

$$\sigma c(n) = c(n)\ \mu(n).$$

Jedna takova funkcija bijaše već promatrana funkcija $(-1)^{\alpha(n)}$.

Prelazimo k novoj primjeni operacije σ. Neka bude funkcija $e(n)$ definirana jednadžbama:

$$e(n) = \begin{cases} 0 & \text{za} \quad n = 1, \\ 1 & \text{„} \quad n > 1. \end{cases}$$

Onda je $\sigma(-1)^{e(n)}$ za $n = 1$ jednako 1, a za $n > 1$ podaje nam broj varijacija s ponavljanjem k produktu n. Uvest ćemo pokratu:

$$v(n) = \sigma(-1)^{e(n)}.$$

Prema jednadžbi (7*) imamo dakle snošaj:

$$(14) \qquad \sum_{d}^{n} (-1)^{e(d)} v\left(\frac{n}{d}\right) = \begin{cases} 1 & \text{za} \quad n = 1, \\ 0 & \text{„} \quad n > 1. \end{cases}$$

Po definiciji funkcije $e(n)$ možemo dakle također napisati ovu jednadžbu:

$$(14') \qquad v(n) = \sum_{d<n}^{n} v(d) \quad \text{za} \quad n > 1.$$

Tom je jednadžbom reducirano traženje broja varijacija s ponavljanjem k produktu n na traženje toga broja za brojeve manje od n.

Jednadžba (14') značajna je za funkciju $v(n)$. Koliko je meni poznato, izvedena je ona prvi put na ovom mjestu. Ja je nijesam nigdje našao, a nema je ni Netto u svojoj kombinatorici[1], premda

[1] E. Netto: Lehrbuch der Combinatorik 1901.

Digitized by Google

u uvodu veli, da je od prilike sve sabrao, što je na polju kombinatorike izrađeno.

Primijenimo li (14) na slučaj, u kom je n potencija p^α prostoga broja p, dobit ćemo:

$$\begin{aligned} v(1) &= 1, \\ v(p) &= 1, \\ v(p^2) &= 2, \\ v(p^3) &= 2^2, \\ v(p^4) &= 2^3, \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Uopće će biti:

$$v(p^\alpha) = 2^{\alpha-1}.$$

U izvedenim slučajevima vidimo, da je ta jednadžba ispravna. Uzmimo dakle, da ona valja za $p^{\alpha-1}$, pa ćemo lako pokazati, da ona vrijedi i za p^α. Prema (14′) je naime:

$$v(p^\alpha) = 1 + v(p) + v(p^2) + v(p^3) + \ldots\ldots + v(p^{\alpha-1})$$

ili:

$$v(p^\alpha) = 1 + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots\ldots + 2^{\alpha-2},$$

a odatle se vidi neposredno, da je navedena jednadžba valjana.

Još ćemo promotriti slučaj, u kom je $n = p_1 p_2 p_3 \ldots\ldots p_r$ produkt samih različitih prostih brojeva. Primjenom jednadžbe (14′) dobit ćemo ove relacije:

$$\begin{aligned} v(p_1) &= 1, \\ v(p_1 p_2) &= 1 + \binom{2}{1}, \\ v(p_1 p_2 p_3) &= 1 + \binom{3}{1} + \binom{3}{2}\left[1 + \binom{2}{1}\right], \\ v(p_1 p_2 p_3 p_4) &= 1 + \binom{4}{1} + \binom{4}{2}\left[1 + \binom{2}{1}\right] + \binom{4}{3}\left\{1 + \binom{3}{1} + \right. \\ &\qquad \left. + \binom{3}{2}\left[1 + \binom{2}{1}\right]\right\}, \end{aligned}$$

Digitized by Google

$$v(p_1p_2p_3p_4p_5) = 1 + \binom{5}{1} + \binom{5}{2}\left[1 + \binom{2}{1}\right] + \binom{5}{3}\left\{1 + \binom{3}{1} + \binom{3}{2}\left[1 + \binom{2}{1}\right]\right\} + \binom{5}{4}\left(1 + \binom{4}{1} + \binom{4}{2}\left[1 + \binom{2}{1}\right] + \binom{4}{3}\left\{1 + \binom{3}{1} + \binom{3}{2}\left[1 + \binom{2}{1}\right]\right\}\right).$$

Odatle se razabira jasno, kako je izraz za $v(p_1p_2 \ldots . p_r)$ građen, makar koliko prostih brojeva bilo sadržano u broju n.

Želimo li d u jednadžbi (14') da protegnemo na sve divizore broja n, valja nam napisati:

$$2^{e(n)}\, v(n) = \sum_{d}^{n} v(d).$$

Odavde izlazi i ovaj snošaj:

$$v(n) = \sum_{d}^{n} 2^{e(d)}\, v(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right),$$

koji se može napisati i ovako:

$$v(n) = \mu(n) + 2\sum_{d>1}^{n} v(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right). \tag{15}$$

Lijepa se sveza dobije među funkcijama $v(n)$ i $\mu(n)$, ako se poslužimo jednadžbama (11) i (11*). Ako stavimo u tim jednadžbama:

$$c(n) = 1, \quad c_1(n) = (-1)^{e(n)},$$

bit će:

$$\chi(n) = \sum_{d}^{n} v(d) = 2^{e(n)}\, v(n),$$

Digitized by Google

$$\chi_1(n) = \sum_{d}^{n} (-1)^{e(d)} \mu\left(\frac{n}{d}\right) = 2^{e(n)} \mu(n);$$

dakle je:

$$2^{e(n)} v(n) = \sigma\left[2^{e(n)} \mu(n)\right], \; 2^{e(n)} \mu(n) = \sigma\left[2^{e(n)} v(n)\right]$$

ili za $n > 1$:

$$2v(n) = \sigma\left[2\mu(n)\right], \quad 2\mu(n) = \sigma\left[2v(n)\right].$$

Ako nam v_1', v_2', v_3', ... pokazuje, koliko ima u prvom, u drugom, u trećem i t. d. razredu varijacija s ponavljanjem, kojima su faktori djeljivi samo prvim potencijama prostih brojeva, to možemo prvu od tih jednadžbi napisati također ovako:

$$(16) \quad v(n) = (-1)^{\alpha(n)}(-v_1' + 2v_2' - 2^2 v_3' + 2^3 v_4' \mp \ldots\ldots)$$

ili:

$$v(n) = |\, -v_1' + 2v_2' - 2^2 v_3' + 2^3 v_4' \mp \ldots\ldots \,|$$

Za $n = p_1 p_2^2$ vidjeli smo već prije, da je $v_1' = 0$, $v_2' = 2$, $v_3' = 3$, inače $v_k' = 0$. Pa je u istinu:

$$v(p, p_2^2) = (-1)^3(4 - 12) = 8.$$

Iz (16) zaključujemo, ako je $\alpha(n)$ tak broj, da ima u takim razredima više varijacija, kojima su faktori djeljivi samo prvim potencijama prostih brojeva, nego u lihim, a obrnuto, ako je $\alpha(n)$ lih broj.

Obilježit ćemo broj varijacija s ponavljanjem k produktu n, kojima su faktori djeljivi samo prvim potencijama prostih brojeva, sa $v'(n)$. Kao što smo odredili formulu za redukciju funkcije $v(n)$ na funkcije s manjim argumentom, tako ćemo sada i za $v'(n)$ odrediti takovu formulu.

Prema (13) možemo napisati:

$$v'(n) = \sigma\left[(-1)^{e(n)} \mu^2(n)\right] = \sigma\left[(-1)^{e(n)+\alpha(n)} \mu(n)\right]$$

Digitized by Google

tako, da valja prema (7) jednadžba:

$$\sum_{d}^{n}(-1)^{e(d)}\,\mu^{2}(d)\,v'\left(\frac{n}{d}\right)=0.$$

Za $n>1$ možemo dakle također staviti:

$$v'(n)=\sum v'\left(\frac{n}{p_1}\right)+\sum v'\left(\frac{n}{p_1p_2}\right)+\sum v'\left(\frac{n}{p_1p_2p_3}\right)+\ldots;$$

u prvom zbroju treba p_1 protegnuti na sve različite proste brojeve, koji su sadržani u n, u drugom na sve produkte od dva takova različna prosta broja, u trećem na sve produkte od tri takova različna prosta broja i t. d.

Ako je n produkt od r različitih prostih brojeva $n=p_1p_2p_3\ldots p_r$, moći ćemo zadnju jednadžbu i ovako napisati:

$$v'(n)=1+\binom{r}{1}v'(p_1)+\binom{r}{2}v'(p_1p_2)+\binom{r}{3}v'(p_1p_2p_3)+\ldots+$$
$$+\binom{r}{r-1}v'(p_1p_2\ldots p_{r-1})$$

U tom je slučaju $v'(n)=v(n)$.

Označimo li sa $v''(n)$ broj takovih varijacija k produktu n, kojima su faktori potencije prostih brojeva, lako ćemo naći i za redukciju te funkcije na funkcije s manjim argumentima prikladnu formulu. Za tu ću svrhu definirati novu funkciju $\pi(n)$ ovako. Neka bude $\pi(1)=1$, $\pi(n)=1$, ako je $n=p^{\alpha}$ potencija prosta broja, a inače jednako 0. Onda je:

$$v''(n)=\sigma\left[(-1)^{e(n)}\,\pi(n)\right],$$

pa stoga dobivamo snošaj:

$$\sum_{d}^{n}(-1)^{e(d)}\,\pi(d)\,v''\left(\frac{n}{d}\right)=0.$$

Digitized by Google

Tu jednadžbu možemo napisati i ovako:

$$v''(n) = \sum_{d>1}^{n} \pi(d)\, v''\left(\frac{n}{d}\right)$$

ili poradi definicije funkcije $\pi(n)$:

$$v''(n) = \sum_{p} v''\left(\frac{n}{p}\right) + \sum_{p} v''\left(\frac{n}{p^2}\right) + \sum_{p} v''\left(\frac{n}{p^3}\right) + \ldots\ldots;$$

u prvom zbroju treba p da prođe sve proste brojeve, koji su u n sadržani bar u prvoj potenciji, u drugom zbroju sve one proste brojeve, koji su u n sadržani bar u drugoj potenciji i t. d.

Najlakše je naći broj varijacija k produktu n, kojima su faktori prosti brojevi.

Ako je $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \ldots . p_r^{\alpha_r}$, to je rečeni broj:

$$v'''(n) = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots . \alpha_r)!}{\alpha_1!\ \alpha_2!\ \alpha_3! \ldots . \alpha_r!}$$

Funkcija $\nu(n)$ neka bude jednaka 1, ako je $n = 1$ ili prost broj, inače jednaka 0. Onda je:

$$v'''(n) = \sigma\left[(-1)^{e(n)}\, \nu(n)\right],$$

a stoga postoji relacija:

$$\sum_{d}^{n} (-1)^{e(d)}\, \nu(d)\, v'''\left(\frac{n}{d}\right) = 0$$

ili:

$$v'''(n) = \sum_{d>1}^{n} \nu(d)\, v'''\left(\frac{n}{d}\right).$$

Tu jednadžbu možemo još jednostavnije napisati ovako:

Digitized by Google

$$v'''(n) = \sum_{i=1}^{r} v'''\left(\frac{n}{p_i}\right).$$

No budući da nam je $v'''(n)$ za svaki n prema onome, što smo malo prije razvili, poznato, moći ćemo također napisati čudnu relaciju:

$$\frac{(\alpha_1+\alpha_2+\ldots.+\alpha_r)!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots..\alpha_r!} = \frac{(\alpha_1+\alpha_2+\ldots.+\alpha_r-1)!}{(\alpha_1-1)!\,\alpha_2!\ldots.\alpha_r!} + \frac{(\alpha_1+\alpha_2+..+\alpha_r-1)}{\alpha_1!\,(\alpha_2-1)!\ldots\alpha_r)} +$$
$$+ \ldots\ldots\ldots + \frac{(\alpha_1+\alpha_2-\ldots.+\alpha_r-1)!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots.(\alpha_r-1)!},$$

gdje treba za 0! staviti 1.

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots. \alpha_r$ jesu koji mu drago brojevi. Zato vrijedi za svaki broj n snošaj:

$$\frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots.\alpha_r!} = \frac{(n-1)!}{(\alpha_1-1)!\,\alpha_2!\ldots.\alpha_r!} + \frac{(n-1)!}{\alpha_1!\,(\alpha_2-1)!\ldots.\alpha_r!} + \ldots. +$$
$$+ \frac{(n-1)!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots.(\alpha_r-1)!},$$

ako je $\alpha_1+\alpha_2+\ldots.+\alpha_r = n$. N. pr. za $n = 5$.

$$\frac{5!}{2!\,3!} = \frac{4!}{1!\,3!} + \frac{4!}{2!\,2!}.$$

Još bih naveo nekoliko primjera za primjenu operacije σ. U prvom ćemo redu potražiti vrijednosti funkcije:

$$\mu_1(n) = \sigma(-1)^{n+1}$$

za pojedine brojeve n. Ako je n lih broj, jednak je $\mu_1(n)$ funkciji $\mu(n)$. Za take brojeve n možemo njenu vrijednost odrediti potpunom indukcijom s pomoću jednadžbe:

$$\sum_{d}^{n} (-1)^{d+1} \mu_1\left(\frac{n}{d}\right) = 0, \quad n > 1,$$

Digitized by Google

kao što smo učinili kod funkcije $\mu(n)$. Tako bismo našli, da je

$$\mu_1(n) = 2^{\alpha-1}\mu\left(\frac{n}{2^\alpha}\right), \text{ ako je } n \equiv 0, \frac{n}{2^\alpha} \equiv 1, \quad (2).$$

No možemo do toga resultata doći postepeno i na drugi način ovako.

Ako je $n = 2^\alpha$, to nam daje svaka varijacija k broju 2^α u izraz $\sigma[(-1)^{n+1}]$ član $+1$. Treba dakle samo odrediti broj varijacija k produktu 2^α, pa će tim već biti određena i vrijednost $\mu_1(2^\alpha)$. No taj je broj očito:

$$\binom{\alpha-1}{0}+\binom{\alpha-1}{1}+\binom{\alpha-1}{2}+\ldots\ldots+\binom{\alpha-1}{\alpha-1} = 2^{\alpha-1},$$

a prema tomu:

$$\mu_1(2^\alpha) = 2^{\alpha-1}.$$

Uzmimo nadalje, da je $n = 2^\alpha p_1 p_2 \ldots\ldots p_r$, gdje su $p_1, p_2, \ldots\ldots p_r$ sami različiti prosti brojevi. U tom ćemo slučaju odrediti $\mu_1(n)$, ako se poslužimo činjenicom, da je

$$\mu_1(np) = -\mu_1(n),$$

ako je p lih prost broj, koji nije sadržan u n kao faktor. Stoga zaključujemo poradi toga, što je

$$\mu_1(2^\alpha) = 2^{\alpha-1},$$

da je:

$$\mu_1(2^\alpha p) = -\mu(2^\alpha) = -2^{\alpha-1},$$

ako je p lih prost broj, pa i uopće da je:

$$\mu_1(2^\alpha p_1 p_2 \ldots\ldots p_r) = (-1)^r 2^{\alpha-1},$$

ako su $p_1, p_2, \ldots\ldots p_r$ sami različiti lihi prosti brojevi, a r njihov broj.

Po tom pravilu možemo također zaključiti, da je

$$\mu_1\left(2p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots\ldots p_r^{\alpha_r}\right) = 0,$$

Digitized by Google

ako su i opet $p_1, p_2, \ldots p_r$ lihi prosti brojevi, a među njima je jedan sadržan u $2p_1^{\alpha_1} p_1^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$ u potenciji višoj od prve. No za taj slučaj možemo $\mu_1(n)$ izvesti i iz općenoga slučaja, koji ćemo sada promatrati.

Označimo sa $N_1(n)$, $N_2(n)$, $N_3(n)$, ... zbroj članova, što nam ih daju varijacije s ponavljanjem k produktu n prvoga, drugoga, trećega razreda i t. d. u izraz za $\mu_1(n)$. Ako uzmemo varijacije s ponavljanjem k lihomu broju $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$, pa iz njih načinimo varijacije s ponavljanjem k broju $2^\alpha m$, dobit ćemo:

$$\begin{aligned} N_1(2^\alpha m) &= -N_1(m), \\ N_2(2^\alpha m) &= a_1 N_1(m) + a_2 N_2(m), \\ N_3(2^\alpha m) &= a_1' N_1(m) + a_2' N_2(m) + a_3' N_3(m), \\ &- - - - - - - - - - - - - - \end{aligned}$$

Tu su brojevi a samo zavisni o broju α te se ne mijenjaju, ako se mjesto m uzme kojigod drugi lih broj. Zbrojit ćemo te jednadžbe, pa ćemo dobiti:

$$\begin{aligned} \mu_1(2^\alpha m) = (-1 + a_1 + a_1' + a_1'' + \ldots.)N_1(m) + \\ (a_2 + a_2' + a_2'' + \ldots.)N_2(m) + \ldots.. \end{aligned}$$

S pomoću te jednadžbe možemo odrediti koeficijente brojeva N, ako za m uzmemo posebne brojeve. Ako stavimo za m prosti broj p, to već znamo otprije, da je $\mu_1(2^\alpha p) = -2^{\alpha-1}$, a

$$N_1(m) = -1, \quad N_2(m) = N_3(m) = \ldots.. = 0.$$

Stoga je:

$$-1 + a_1 + a_1' + a_1'' + \ldots.. = 2^{\alpha-1}.$$

Isto ćemo tako dobiti, ako stavimo za m produkt $p_1 p_2$ dvaju različitih lihih prostih brojeva, da je:

$$a_2 + a_2' + a_2'' + \ldots.. = 2^{\alpha-1};$$

slično za $m = p_1 p_2 p_3$, da je:

$$a_3' + a_3'' + a_3''' + \ldots.. = 2^{\alpha-1}$$

i t. d.

Digitized by Google

Hoćemo li dakle, da dokažemo, da je koeficijent svakoga N jednak $2^{\alpha-1}$, treba samo da pretpostavimo, da to vrijedi za koeficijent broja $N_k(m)$, pa da dokažemo, da isto vrijedi i za koeficijent broja $N_{k+1}(m)$. Uzmimo dakle, da je:

$$\mu_1(2^\alpha p_1 p_2 \ldots . p_k) = 2^{\alpha-1}[N_1(m) + N_2(m) + \ldots . + N_k(m)]$$

ili:

$$(-1)^k = N_1(m) + N_2(m) + \ldots . + N_k(m).$$

Izvedemo li sada s pomoću funkcija $N(m)$ vrijednosti za funkcije $N(mp_{k+1})$, gdje nam je p_{k+1} prost broj, koji nije sadržan u m, dobit ćemo:

$$\begin{aligned}
N_1(mp_{k+1}) &= N_1(m) \\
N_2(mp_{k+1}) &= -2[N_1(m) - N_2(m)] \\
N_3(mp_{k+1}) &= -3[N_2(m) - N_3(m)] \\
&- - - - - - - - - - - - \\
N_k(mp_{k+1}) &= -k[N_{k-1}(m) - N_k(m)] \\
N_{k+1}(mp_{k+1}) &= -(k+1)N_k(m)
\end{aligned}$$

i:

$$(-1)^{k+1} = N_1(m) - 2[N_1(m) - N_2(m)] - 3[N_2(m) - N_3(m)] - \ldots - k[N_{k-1}(m) - N_k(m)] - (k+1)\frac{C_{k+1}}{2^{\alpha-1}} N_k(m),$$

gdje je stavljeno:

$$C_{k+1} = a_{k+1}^{(k-1)} + a_{k+2}^{(k)} + a_{k+3}^{(k+1)} + \ldots . .$$

S pomoću jednadžbe (c) nalazimo za C_{k+1} vrijednost:

$$C_{k+1} = 2^{\alpha-1}.$$

Imamo dakle sasvim općeno:

$$\mu_1(2^\alpha m) = 2^{\alpha-1}[N_1(m) + N_2(m) + N_3(m) + \ldots . .].$$

Uzme li se sada za m broj $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$, koji je djeljiv bar jednim kvadratom kojega lihoga prostoga broja, bit će:

$$N_1(m) + N_2(m) + N_3(m) + \ldots . = 0,$$

Digitized by Google

a stoga:

$$\mu_1(2^\alpha p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots\ldots p_r^{\alpha_r}) = 0.$$

Isporedimo li vrijednosti, što ih može imati $\mu(n)$, sa vrijednostima, što smo ih našli za funkciju $\mu_1(n)$, možemo napisati:

$$(17) \qquad \mu_1(n) = \begin{cases} \mu(n), & \text{ako je } n \equiv 1, \quad (2) \\ 2^{\alpha-1}\mu\left(\frac{n}{2^\alpha}\right), & \text{„ „ } n \equiv 0, \quad \frac{n}{2^\alpha} \equiv 1, (2). \end{cases}$$

Po definiciji funkcije $\mu(n)$ bijaše

$$\mu_1(n) = \sigma[(-1)^{n+1}].$$

Stoga mora također biti:

$$\sigma[\mu_1(n)] = (-1)^{n+1}.$$

Još bih ovdje spomenuo, da je:

$$(18) \qquad \sum_d \mu_1(d) = \begin{cases} 2^\alpha, & \text{ako je } n = 2^\alpha, \\ 0, & \text{„ „ } n \neq 2^\alpha, \end{cases}$$

o čem se lako možemo uvjeriti.

Pri određivanju funkcija, koje iziđu primjenom operacije σ, često dobro služi funkcija $\mu(n)$.

Neka n. pr. $\theta(n)$ znači broj divizorâ broja n; onda možemo napisati jednadžbu:

$$\theta(n) = \sum_d^n 1^d.$$

Iz nje izvodimo, da je:

$$(19) \qquad 1 = \sum_d^n \theta(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right).$$

Digitized by Google

Dalje zaključujemo, da je:

$$\mu(n) = \sum_{d}^{n} \sigma\theta(d), \tag{20}$$

a odavde izlazi relacija:

$$\sigma\theta(n) = \sum_{d}^{n} \mu(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right).$$

Ako je u broju n sadržan koji prost broj bar u trećoj potenciji, jasno je, da za takove n mora biti:

$$\sigma\theta(n) = 0,$$

jer je tada za svaki divizor d broja n ili $\mu(d)$ ili $\mu\left(\frac{n}{d}\right)$ jednak 0. $\sigma\theta(n)$ može dakle biti različit od 0 samo za brojeve n od oblika:

$$n = \pi_1^{a}\pi_2^{a} \ldots\ldots \pi_s^{2} p_1 p_2 \ldots\ldots p_r,$$

gdje su $\pi_1, \pi_2, \ldots\ldots \pi_s, p_1, p_2, \ldots\ldots p_r$ sve sami među sobom različiti prosti brojevi. U tom će slučaju biti $\mu(d)\,\mu\left(\frac{n}{d}\right)$ različit od 0 samo za one divizore d, koji su djeljivi brojem $\pi_1\pi_2 \ldots\ldots \pi_s$. Te ćemo divizore dobiti kao članove polinoma, koji iziđe, ako se izvede množidba u produktu:

$$\pi_1\pi_2 \ldots\ldots p_s \prod_{1}^{r} (1+p_i).$$

Ima ih svega 2^r. Za svaki takav divizor ima $\mu(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right)$ isti predznak

$$(-1)^{\alpha(n)} = (-1)^r.$$

Stoga je:

$$\sigma\theta(\pi_1^{2}\pi_2^{2} \ldots\ldots \pi_s^{2} p_1 p_2 \ldots\ldots p_r) = (-1)^r 2^r.$$

Digitized by Google

Ustanovimo li, da je $\mu_2(n) = 0$, ako je u broju n sadržan makar samo jedan prost broj bar u trećoj potenciji, a inače da je $\mu_2(n) = 1$, pa označimo li sa $r(n)$ broj prostih brojeva, koji su u n sadržani samo u prvoj potenciji, to ćemo moći staviti:

$$\sigma\theta(n) = (-1)^{r(n)} 2^{r(n)} \mu_2(n).$$

Prema jednadžbi je (20) dakle:

$$\mu(n) = \sum_d^n (-1)^{r(d)} 2^{r(d)} \mu_2(d).$$

Uvedemo li u jednadžbu:

$$\sum_d^n \theta(d)\, \sigma\theta\left(\frac{n}{d}\right) = 0$$

za $\sigma\theta(n)$ nađenu vrijednost, dobit ćemo:

$$\sum_d^n (-1)^{r(d)} 2^{r(d)} \mu_2(d) \theta\left(\frac{n}{d}\right) = 0.$$

Postupajući posve analogno naći ćemo za funkciju $s(n)$, koja podaje zbroj svih divizora broja n, ako stavimo:

$$s(n) = \sum_d^n d,$$

ponajprije:

$$n = \sum_d^n s(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right); \tag{21}$$

zatim:

$$\mu(n) = \sum_d^n d\, \sigma s\left(\frac{n}{d}\right) \tag{21'}$$

Digitized by Google

konačno:

$$\sigma s(n) = \sum_{d}^{n} d\mu(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right).$$

Kao što smo našli za $\sigma\theta(n)$, tako nalazimo i sada, da je $\sigma s(n) \quad 0$, ako je koji prost broj sadržan u n bar u trećoj potenciji; ako je pak $n = \pi_1^{a_1}\pi_2^{a_2} \ldots \pi_s^{a_s} p_1 p_2 \ldots . p_r$, da je:

$$\sigma s(n) = (-1)^r \pi_1 \pi_2 \ldots . \pi_s \prod_{1}^{r} (1+p_i).$$

Ako napišemo pokraćeno

$$\sigma s(n) = s'(n),$$

to valja jednadžba:

$$\sum_{d}^{n} s(d)s'\left(\frac{n}{d}\right) = 0.$$

Označimo prema Cesáru sa $\tau(n)$ broj svih različitih prostih brojeva sadržanih u n. Ako se poslužimo prije uvedenom funkcijom $\nu(n)$, moći ćemo staviti:

$$1+\tau(n) = \sum_{d}^{n} \nu(d),$$

gdje je $\tau(1) = 0$. Iz te jednadžbe izvodimo novu:

$$\nu(n) = \sum_{d}^{n} \left((1+\tau(d)\right) \mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

ili za $n > 1$ s obzirom na (12):

$$\nu(n) = \sum_{d}^{n} \tau(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right). \tag{22}$$

Digitized by Google

Iz predzadnje jednadžbe izlazi:

$$\sigma\left(1+\tau(n)\right)=\sum_{d}^{n}\sigma\nu(d)\,\mu\left(\frac{n}{d}\right).$$

Stavimo li $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}\ldots.p_r^{\alpha_r}$, to je:

$$(22')\qquad \sigma\nu(n)=(-1)^{\alpha(n)}\,\frac{\alpha(n)!}{\alpha_1!\;\alpha_2!\ldots.\alpha_r!}.$$

S obzirom na svojstva funkcije $\mu(n)$ možemo jednadžbu (22) napisati također u ovom obliku:

$$(22'')\quad \nu(n)=\tau(n)-\sum\tau\left(\frac{n}{p_i}\right)+\sum\tau\left(\frac{n}{p_ip_k}\right)-$$
$$-\sum\tau\left(\frac{n}{p_ip_kp_l}\right)\pm\ldots\ldots;$$

u prvom zbroju treba i da prođe sve brojeve od 1 do r, u drugom treba za i, k staviti sve kombinacije drugoga reda bez ponavljanja od elemenata 1, 2, 3, $\ldots\ldots r$, u trećem za i, k, l sve takove kombinacije trećega reda i t. d.

Desna je strana zadnje jednadžbe, osim ako je $n=1$ ili prost broj, uvijek jednaka 0. Ta osobito zanimljiva relacija prelazi u slučaju, da je $n=p_1p_2\ldots p_r$ produkt od r samih različitih prostih brojeva, u ovu posebnu:

$$r-\binom{r}{1}(r-1)+\binom{r}{2}(r-2)-\binom{r}{3}(r-3)\pm\ldots+(-1)^{r-1}\binom{r}{r-1}=0,$$

ako je $r>1$.

Tu relaciju, koju smo usput izveli iz naše relacije (22''), spominje prvi put S. F. Lacroix[1].

Slični snošaji postoje za funkcije $\varkappa(n)$ i $\pi(n)$, koje smo već prije uveli. Za njih vrijedi jednadžba:

[1] Traité de calcul différ. et intégr. T. 3. p. 26.

Digitized by Google

$$1+\alpha(n)=\sum_{d}^{n}\pi(d),$$

iz koje izlazi:

$$\pi(n)=\sum_{d}^{n}\alpha(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right) \text{ za } n>1. \tag{23}$$

I tu jednadžbu možemo napisati u obliku:

$$\pi(n)=\alpha(n)-\sum\alpha\left(\frac{n}{p_i}\right)+\sum\alpha\left(\frac{n}{p_ip_k}\right)-\sum\alpha\left(\frac{n}{p_ip_kp_l}\right)\pm\ldots. \tag{23'}$$

gdje zbrojevi imadu isto značenje, kao u predašnjem slučaju. No sada je desna strana, osim ako je n prost broj, još i onda jednaka 1, ako je n potencija prosta broja; u svakom je drugom slučaju jednaka 0.

Navest ćemo jedan primjer za relacije (22'') i (23'). Neka bude $n=p_1p_2^3$. Onda je:

$$\tau(p_1p_2^3)-\tau(p_2^3)-\tau(p_1p_2^2)+\tau(p_2^2)=2-1-2+1=0,$$
$$\alpha(p_1p_2^3)-\alpha(p_2^3)-\alpha(p_1p_2^2)+\alpha(p_2^2)=4-3-3+2=0.$$

Gaussova funkcija $\varphi(n)$ pokazuje, koliko ima prema n prostih brojeva manjih od n. Njena se vrijednost nađe, kako je poznato, ako je $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_r^{\alpha_r}$, iz jednadžbe:

$$\varphi(n)=\prod_{1}^{r}\left(1-\frac{1}{p_i}\right).$$

Ta se jednadžba može napisati i ovako:

$$\varphi(n)=\sum_{d}^{n}d\,\mu\left(\frac{n}{d}\right).$$

Obrnemo li tu jednadžbu, dobit ćemo poradi toga, što je $\sigma\mu(n)=1$:

Digitized by Google

$$n = \sum_{d}^{n} \varphi(d).$$

Nadalje zaključujemo, da je:

$$1 = \sum_{d}^{n} d\, \sigma\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$$

i konačno, da je:

$$\sigma\varphi(n) = \sum_{d}^{n} d\mu(d) = \prod_{1}^{r} (1-p_i). \tag{24}$$

Za $\sigma\varphi(n)$ uvest ćemo oznaku $\varphi'(n)$. Onda možemo za tu funkciju napisati jednadžbe:

$$\sum_{d}^{n} \varphi(d)\varphi'\left(\frac{n}{d}\right) = 0, \tag{24'}$$

$$\sum_{d}^{n} d\,\varphi'\left(\frac{n}{d}\right) = 1. \tag{24''}$$

Tako je n. p. za $n = 12$:

$$\begin{aligned}
&\varphi(1)\varphi'(12)+\varphi(2)\varphi'(6)+\varphi(3)\varphi'(4)+\varphi(4)\varphi'(3)+\varphi(6)\varphi'(2)+\varphi(12)\varphi'(1) = \\
&1.(1-2)(1-3)+1.(1-2)(1-3)+2(1-2)+2(1-3)+2(1-2)+4.1 = \\
&\quad 2 \quad + \quad 2 \quad - \quad 2 \quad - \quad 4 \quad - \quad 2 \quad + \quad 4 \quad = 0 \\
&\varphi'(12) + 2\varphi'(6) + 3\varphi'(4) + 4\varphi'(3) + 6\varphi'(2) + 12\varphi'(1) = \\
&(1-2)(1-3)+2(1-2)(1-3)+3(1-2)+4(1-3)+6(1-2)+12 = \\
&\quad 2 \quad + \quad 4 \quad - \quad 3 \quad - \quad 8 \quad - \quad 6 \quad + 12 \quad = 1
\end{aligned}$$

Liouville je našao, da je zbroj:

$$\sum_{d}^{n} (-1)^{\alpha(d)},$$

Digitized by Google

ako je $n = 1$ i ako je n potpun kvadrat, jednak 1, inače jednak 0. Uvest ćemo funkciju $\varkappa(n)$. Ona neka bude jednaka 1, ako je $n = 1$ i ako je n potpun kvadrat, inače jednaka 0. Onda možemo napisati jednadžbu:

$$\sum_{d}^{n} (-1)^{\alpha(d)} = \varkappa(n).$$

Liouville je uveo za $(-1)^{\alpha(n)}$ oznaku $\lambda(n)$, tako da je:

$$\sum_{d}^{n} \lambda(d) = \varkappa(n). \tag{25}$$

Dalje izvodimo odatle, da je:

$$\lambda(n) = \sum_{d}^{n} \varkappa(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right); \tag{25'}$$

nadalje, da je:

$$\mu(n) = \sum_{d}^{n} \lambda(d)\, \sigma\varkappa\left(\frac{n}{d}\right), \tag{25''}$$

te dobivamo konačno za $\sigma\varkappa(n)$ jednadžbu:

$$\sigma\varkappa(n) = \sum_{d}^{n} \lambda(d)\mu(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right). \tag{25'''}$$

S pomoću te jednadžbe lako je odrediti $\sigma\varkappa(n)$. Ponajprije je jasno, da je $\sigma\varkappa(n) = 0$, kako je u broju n sadržan koji prost broj bar u trećoj potenciji. Stoga nam valja samo još promotriti brojeve n u obliku:

$$n = \pi_1^2\pi_2^2 \ldots \pi_s^2\, p_1 p_2 \ldots p_r.$$

Lako je uvidjeti, da je za taj slučaj:

Digitized by Google

$$\sigma\varkappa(n) = (-1)^s + \binom{r}{1}(-1)^{s+1} + \binom{r}{2}(-1)^{s+2} + \ldots + \binom{r}{r}(-1)^{s+r} =$$

$$(-1)^s\left\{1 - \binom{r}{1} + \binom{r}{2} \mp \ldots + (-1)^r\binom{r}{r}\right\}.$$

No svinuta je zagrada samo onda različita od ništice, ako je $r = 0$. Dakle je $\sigma\varkappa(n)$ samo za brojeve u obliku:

$$\pi_1^2\pi_2^2 \ldots \pi_s^2 \tag{26}$$

različito od 0 i u tom slučaju jednako $(-1)^s$. Označimo $\sigma\varkappa(n)$ sa $\varkappa'(n)$. Onda valjaju jednadžbe:

$$\sum_d^n \varkappa(d)\varkappa'\left(\frac{n}{d}\right) = 0,$$

$$\sum_d^n \varkappa(d)\,\theta_2'\left(\frac{n}{d}\right) = 1, \tag{27}$$

$$\sum_d^n \varkappa'(d)\,\theta_2\left(\frac{n}{d}\right) = 1. \tag{28}$$

Sa $\theta_2(n)$ označen je broj kvadratnih divizora broja n, a sa $\theta_2'(n)$ razlika među brojem divizorâ u obliku (26) sa takim i lihim brojem prostih faktora; 1 treba računati k prvoj vrsti.

Tako je n. pr. za $n = 2^2.3^2$:

$$\begin{array}{rcrcrcrl}
\varkappa(1)\varkappa'(2^2.3^2) + & \varkappa(2^2)\varkappa'(3^2) + & \varkappa(3^2)\varkappa'(2^2) + & \varkappa(2^2.3^2)\varkappa'(1) = \\
1 & - & 1 & - & 1 & + & 1 & = 0 \\
\varkappa(1)\,\theta_2'(2^2.3^2) + & \varkappa(2^2)\theta_2'(3^2) + & \varkappa(3^2)\theta_2'(2^2) + & \varkappa(2^2.3^2)\theta_2'(1) = \\
0 & + & 0 & + & 0 & + & 1 & = 1 \\
\varkappa'(1)\,\theta_2(2^2.3^2) + & \varkappa'(2^2)\theta_2(3^2) + & \varkappa'(3^2)\theta_2(2^2) + & \varkappa'(2^2.3^2)\theta_2(1) = \\
4 & - & 2 & & 2 & + & 1 & = 1.
\end{array}$$

Zadovoljit ćemo se navedenim primjenama operacije σ pa poći k promatranju jednadžbe (10) u nekoliko posebnih slučajeva.

Digitized by Google

Neka bude $c(n)$ takova aritmetična funkcija, za koju valja jednadžba:

$$c(m)\,c(n) = c(mn)$$

za koji mu drago broj m i n.

Stavit ćemo u:

$$(10) \qquad \sum_{d}^{n} \sigma f(d) \sum_{t}^{\frac{n}{d}} f(t) = 1$$

za $f(n)$ nekoliko posebnih funkcija.

1) $f(n) = c(n)$, $\sigma f(n) = c(n)\mu(n)$. Onda je

$$\sum_{d}^{n} c(d)\mu(d) \sum_{t}^{\frac{n}{d}} c(t) = 1.$$

Uvedimo sada za $c(n)$ nekoliko posebnih funkcija te vrste.

a) $c(n) = n^k$, gdje je k makar kakav broj. Dobit ćemo:

$$\sum_{d}^{n} d^k \mu(d) \sum_{t}^{\frac{n}{d}} t^k = 1.$$

Za $k = 0$ izlazi relacija (19).

Ako označimo zbroj k-tih potencija svih divizora broja n sa $s_k(n)$, možemo napisati jednadžbu:

$$\sum_{d}^{n} d^k \mu(d) s_k\left(\frac{n}{d}\right) = 1.$$

Za $k = 1$ prelazi ta jednadžba u jednadžbu (21).

b) $c(n) = \lambda(n)$. U tom je slučaju:

Digitized by Google

$$\sum_{d}^{n} \lambda(d)\mu(d)\varkappa\left(\frac{n}{d}\right) = 1,$$

a možemo tu jednadžbu napisati i ovako:

$$\sum_{d^2}^{n} \lambda\left(\frac{n}{d^2}\right)\mu\left(\frac{n}{d^2}\right) = 1,$$

gdje d^2 treba da prođe sve kvadratne divizore broja n.

1') $f(n) = c(n)\mu(n)$, $\sigma f(n) = c(n)$. Jednadžba (10) dobiva ovaj oblik:

$$\sum_{d}^{n} c(d) \sum_{t}^{\frac{n}{d}} c(t)\mu(t) = 1.$$

a) $c(n) = n^k$ za koji mu drago broj k. Onda je:

$$\sum_{d}^{n} d^k \sum_{t}^{\frac{n}{d}} t^k\mu(t) = 1.$$

Ako je $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$, to je:

$$\sum_{d}^{n} d^k\mu(d) = \prod_{1}^{r} (1-p_i^k). \tag{29}$$

Uvedimo oznaku:

$$\varphi^{(k)}(n) = \sum_{d}^{n} d^k\mu(d) = \prod_{1}^{r} (1-p_i^k); \tag{30}$$

onda je:

$$\sum_{d}^{n} d^k\, \varphi^{(k)}\left(\frac{n}{d}\right) = 1. \tag{31}$$

Digitized by Google

Za $k = 1$ dobivamo funkciju $\varphi'(n)$, koja nam je već otprije poznata. Kako je god bilo:

$$\varphi'(n) = \sigma\varphi(n),$$

tako je također:

$$\varphi^{(k)}(n) = \sigma\varphi_k(n),$$

ako je:

$$\varphi_k(n) = n^k \sum_d^n \frac{\mu(d)}{d^k} = n^k \prod_1^r \left(1 - \frac{1}{p_i^k}\right).$$

O tom se lako uvjerimo s pomoću jednadžbe, kojom smo definirali $\varphi_k(n)$. Dakle vrijedi za koji mu drago k jednadžba:

$$\sum_d^n \varphi_k(d)\, \varphi^{(k)}\left(\frac{n}{d}\right) = 0.$$

Kako se vidi iz produkata, kojima su definirane funkcije $\varphi_k(n)$ i $\varphi^{(k)}(n)$, postoji sveza:

$$\varphi_k(n) = n^k\, \varphi^{(-k)}(n).$$

b) $c(n) = \lambda(n)$. Prema tomu:

$$\sum_d^n \lambda(d) \sum_t^{\frac{n}{d}} \lambda(t)\mu(t) = 1.$$

Stavimo li:

$$\omega(n) = \sum_d^n \lambda(d)\mu(d),$$

to je, kako već Cesáro navodi,

$$\omega(n) = 2^{\tau(n)},$$

te valja jednadžba:

Digitized by Google

$$\sum_{d}^{n} \lambda(d)\omega\left(\frac{n}{d}\right) = 1,$$

koju također Cesáro spominje.

2) $f(n) = (-1)^{n+1}c(n)$, $\sigma f(n) = c(n)\mu_1(n)$.

Jednadžba (10) prima sada oblik:

$$\sum_{d}^{n} c(d)\mu_1(d) \sum_{t}^{\frac{n}{d}} (-1)^{t+1}c(t) = 1.$$

a) za $c(n) = n^k$ izlazi dakle jednadžba:

$$\sum_{d}^{n} d^k\mu_1(d) \sum_{t}^{\frac{n}{d}} (-1)^{t+1}\, t^k = 1.$$

$\sum_{d}^{n} (-1)^{d+1}d^k$ podaje razliku među zbrojem k-tih potencija lihih divizora broja n i zbrojen k-tih potencija takih divizora toga broja. Označimo li tu diferenciju sa $\delta_k(n)$, to valja relacija:

$$\sum_{d}^{n} d^k\mu_1(d)\,\delta_k\left(\frac{n}{d}\right) = 1.$$

U slučaju $k = 0$ podaje dakle $\delta_k(n)$ razliku među brojem lihih i takih divizora broja n, a u slučaju $k = 1$ razliku među zbrojem lihih i takih divizora toga broja n.

b) za $c(n) = \lambda(n)$ dobivamo:

$$\sum_{n}^{n} \lambda(d)\mu_1(d) \sum_{t}^{\frac{n}{d}} (-1)^{t+1}\lambda(t) = 1,$$

gdje je značenje drugoga zbroja jasno.

Digitized by Google

3) $f(n) = c(n)\nu(n)$, $\sigma f(n) = (-1)^{\alpha(n)} \dfrac{\alpha(n)!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\ldots\,\alpha_r!}\, c(n)$.

Iz (10) dobivamo:

$$\sum_{d}^{n} c(d)\sigma\nu(d) \sum_{t}^{\frac{n}{d}} c(t)\nu(t) = 1,$$

a u posebnom slučaju $c(n) = n^k$:

$$\sum_{d}^{n} d^k \sigma\nu(d) \sum_{t}^{\frac{n}{d}} t^k \nu(t) = 1.$$

Tu je:

$$\sum_{d}^{n} d^k \nu(d) = 1 + p_1{}^k + p_2{}^k + \ldots + p_r^k = 1 + \sigma_k(n),$$

a napose za $k = 0$:

$$\sum_{d}^{n} \nu(d) = 1 + \tau(n).$$

3′) $f(n) = c(n)\sigma\nu(n)$, $\sigma f(n) = c(n)\nu(n)$.

$$\sum_{d}^{n} c(d)\nu(d) \sum_{t}^{\frac{n}{d}} c(t)\sigma\nu(t) = 1.$$

Najjednostavniji se slučaj dobiva za $c(n) = 1$. Onda je, ako označimo

$$\sum_{d}^{n} \sigma\nu(d)$$

sa $\rho(n)$,

Digitized by Google

$$\sum_{d}^{n} \nu(d)\varrho\left(\frac{n}{d}\right) = 1$$

ili:

$$1 = \varrho(n) + \varrho\left(\frac{n}{p_1}\right) + \varrho\left(\frac{n}{p_2}\right) + \ldots + \varrho\left(\frac{n}{p_r}\right).$$

Ta jednadžba služi za redukciju funkcije $\varrho(n)$ na funkcije s manjim argumentom. Inače možemo također zaključiti, da je:

$$\sigma\varrho(n) = \sum_{d}^{n} \nu(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right) = \mu(n) + \mu\left(\frac{n}{p_1}\right) + \mu\left(\frac{n}{p_2}\right) + \ldots + \mu\left(\frac{n}{p_r}\right).$$

Prema tomu je funkcija $\varrho'(n) = \sigma\varrho(n)$ od 0 različita samo onda, ako je $n = 1$ i ako n ima oblik:

$$p_1 p_2 \ldots . p_r \quad \text{ili} \quad p_1 p_2 \ldots . p_r \, q^2,$$

a onda je:

$$\varrho'(p_1 p_2 \ldots . p_r) = (-1)^{r+1}(r-1), \quad \varrho'(p_1 p_2 \ldots . p_r q^2) = (-1)^{r+1};$$

$p_1, p_2, \ldots p_r, q$ sami su različiti prosti brojevi.

$\varrho(n)$ možemo odrediti također s pomoću veoma jednostavne funkcije $\varrho'(n)$, jer je:

$$\varrho(n) = \sigma\varrho'(n).$$

4) $$f(n) = (-1)^{e(n)}c(n), \quad \sigma f(n) = c(n)v(n).$$

Prema tomu:

$$\sum_{d}^{n} c(d)v(d) \sum_{t}^{\frac{n}{d}} (-1)^{e(t)} c(t) = 1$$

ili:

$$1 + \sum_{d}^{n} c(d)v(d) \sum_{t}^{\frac{n}{d}} c(t) = 2\sum_{d}^{n} c(d)\,v(d).$$

Digitized by Google

Tako imamo n. pr. za $c(n) = n^k$:

$$1 + \sum_d^n d^k\, v(d) s_k\left(\frac{n}{d}\right) = 2\sum_d^n d^k\, v(d).$$

Uzme li se $k = 0$, to izlazi jednadžba:

$$1 + \sum_d^n v(d)\vartheta\left(\frac{n}{d}\right) = 4v(n).$$

Broj $n = 12$ ima divizore:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12.$$

Za taj je slučaj:

$$v(1)=1,\ v(2)=1,\ v(3)=1,\ v(4)=2,\ v(6)=3,\ v(12)=8$$
$$\vartheta(1)=1,\ \vartheta(2)=2,\ \vartheta(3)=2,\ \vartheta(4)=3,\ \vartheta(6)=4,\ \vartheta(12)=6.$$

Stoga je:

$$1+v(1)\vartheta(12)+v(2)\vartheta(6)+v(3)\vartheta(4)+v(4)\vartheta(3)+v(6)\vartheta(2)+v(12)\vartheta(1)$$
$$= 1+\ 6\ +\ 4\ +\ 3\ +\ 4\ +\ 6\ +\ 8\ = 4.8$$

Za $k = 1$ izlazi relacija:

$$1 + \sum_d^n dv(d) s\left(\frac{n}{d}\right) = 2\sum_d^n dv(d).$$

Budući da je:

$$s(1)=1,\ s(2)=3,\ s(3)=4,\ s(4)=7,\ s(6)=12,\ s(12)=28,$$

to je za $n = 12$:

$$1+1.v(1)s(12)+2v(2)s(6)+3v(3)s(4)+4v(4)s(3)+6v(6)s(2)+12v(12)s(1)=$$
$$1+\ 28\ +\ 24\ +\ 21\ +\ 32\ +\ 54\ +\ 96\ =256,$$
$$2\Big(v(1)+2v(2)+3v(3)+4v(4)+6v(6)+12v(12)\Big)=$$
$$=2(\ 1\ +\ 2\ +\ 3\ +\ 8\ +\ 18\ +\ 96\ )=2.128=256.$$

Digitized by Google

Neka se još za $c(n)$ stavi $\lambda(n)$. Onda je:

$$1 + \sum_{d}^{n} \lambda(d)\lambda\left(\frac{n}{d}\right) v\left(\frac{n}{d}\right) = 2 \sum_{d}^{n} \lambda(d)v(d)$$

ili drukčije pisano:

$$1 + \sum_{d^2}^{n} \lambda\left(\frac{n}{d^2}\right) v\left(\frac{n}{d^2}\right) = 2 \sum_{d}^{n} \lambda(d)v(d).$$

U slučaju $n = 12$ imamo:

$$\lambda(1) = 1,\ \lambda(2) = -1,\ \lambda(3) = -1,\ \lambda(4) = 1,\ \lambda(6) = 1,\ \lambda(12) = -1,$$

a kvadratni su divizori: 1 i 4. Stoga je:

$$1 + \lambda(12)v(12) + \lambda(3)v(3) =$$
$$= 2 \quad - 8 \quad - 1 \quad = -8,$$
$$2\left(\lambda(1)v(1)+\lambda(2)v(2)+\lambda(3)v(3)+\lambda(4)v(4)+\lambda(6)v(6)+\lambda(12)v(12)\right) =$$
$$= 2\,(\quad 1 \quad - 1 \quad - 1 \quad + \quad 2 \quad + \quad 3 \quad - 8 \quad) = -8.$$

5) $f(n) = (-1)^{c(n)}\mu^2(n)c(n)$, $sf(n) = v'(n)c(n)$.

Iza male redukcije dobivamo u tom slučaju relaciju:

$$1 + \sum_{d}^{n} c(d)v'(d) \sum_{t}^{\frac{n}{d}} c(t)\mu^2(t) = 2 \sum_{d}^{n} c(d)v'(d).$$

Za $c(n) = 1$ izlazi:

$$1 + \sum_{d}^{n} v'(d) \sum_{t}^{\frac{n}{d}} \mu^2(t) = 2 \sum_{d}^{n} v'(d),$$

no budući da je

Digitized by Google

$$\sum_{d}^{n} \mu^2(d) = \omega(n),$$

možemo također napisati jednostavni snošaj:

$$1 + \sum_{d}^{n} v'(d)\omega\left(\frac{n}{d}\right) = 2\sum_{d}^{n} v'(d).$$

Tako imamo n. pr. za $n = 12$:

$$v'(1)=1,\ v'(2)=1,\ v'(3)=1,\ v'(4)=1,\ v'(6)=3,\ v'(12)=5;$$
$$\omega(1)=1,\ \omega(2)=2,\ \omega(3)=2,\ \omega(4)=2,\ \omega(6)=4,\ \omega(12)=4,$$

a prema tomu:

$$1+v'(1)\omega(12)+v'(2)\omega(6)+v'(3)\omega(4)+v'(4)\omega(3)+v'(6)\omega(2)+v'(12)\omega(1) =$$
$$=1+\ 4\ +\ 4\ +\ 2\ +\ 2\ +\ 6\ +\ 5\ =24,$$

$$2\Big(v'(1)+v'(2)+v'(3)+v'(4)+v'(6)+v'(12)\Big) =$$
$$2(\ 1+\ 1+\ 1+\ 1+\ 3+\ 5\ ) = 24.$$

Osobito jednostavna relacija izlazi, ako se uzme za $c(n)$ funkcija $\lambda(n)$. Onda je:

$$1 + \sum_{d}^{n} \lambda(d)v'(d)\sum_{t}^{\frac{n}{d}} \mu(t) = 2\sum_{d}^{d} \lambda(d)v'd,$$

a poradi poznatoga nam svojstva funkcije $\mu(n)$:

$$1 + \lambda(n)v'(n) = 2\sum_{d}^{n} \lambda(d)\,v'(d).$$

Iz te se jednadžbe vidi, da je $v'(n)$ u svakom slučaju lih broj. Za broj 12 bit će:

Digitized by Google

$$1+\lambda(12)v'(12) = 2\Big(\lambda(1)v'(1)+\lambda(2)v'(2)+\lambda(3)v'(3)+\lambda(4)v'(4) + \\ + \lambda(6)v'(6)+\lambda(12)v'(12)\Big)$$

ili:

$$1 - 5 = 2\,(1 - 1 - 1 + 1 + 3 - 5).$$

6) $f(n) = (-1)^{e(n)}\pi(n)c(n)$, $\sigma f(n) = v''(n)c(n)$.

Analogno s predašnjim slučajevima izlazi:

$$1 + \sum_{d}^{n} e(d)v''(d) \sum_{t}^{\frac{n}{d}} c(t)\pi(t) = 2 \sum_{d}^{n} c(d)v''(d),$$

a napose za $c(n) = n^k$:

$$1 + \sum_{n}^{n} d^k\, v''(d) \sum_{t}^{\frac{n}{d}} t^k\, \pi\,(t) = 2 \sum_{d}^{n} d^k\, v''\,(d).$$

Izraz:

$$\sum_{d}^{n} t^k\, \pi\,(t) - 1$$

pokazuje zbroj k-tih potencija svih divizora broja n, koji su potencije prostih brojeva.

Za $k = 0$ pokazuje isti izraz, koliko ima u n sadržanih bilo jednakih, bilo različitih prostih brojeva.

Dakle vrijedi jednadžba:

$$1 + \sum_{d}^{n} v''(d)\, \alpha\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d}^{n} v''(d).$$

Tako imamo opet za broj 12:

Digitized by Google

$$v''(1)=1,\ v''(2)=1,\ v''(3)=1,\ v''(4)=2,\ v''(6)=2,\ v''(12)=5,$$
$$\alpha(1)=1,\ \alpha(2)=1,\ \alpha(3)=1,\ \alpha(4)=2,\ \alpha(6)=2,\ \alpha(12)=3,$$

a prema tomu:

$$1+v''(1)\alpha(12)+v''(2)\alpha(6)+v''(3)\alpha(4)+v''(4)\alpha(3)+v''(6)\alpha(2)+v''(12)\alpha(1) =$$
$$1 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 0 = 12$$
$$v''(1)+v''(2)+v''(3)+v''(4)+v''(6)+v''(12) =$$
$$1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 5 = 12.$$

Ako označimo:

$$\sum_d^n \lambda(d)\pi(d)$$

sa $\delta_1(n)$, možemo uvrstivši za $c(n)$ funkciju $\lambda(n)$ napisati ovu jednadžbu:

$$1 + \sum_d^n \lambda(d)v''(d)\delta\left(\frac{n}{d}\right) = 2\sum_d^n \lambda(d)v''(d).$$

Tu nam pokazuje $\delta_1(n)$ razliku među brojem takovih divizora broja n, koji su take potencije prostih brojeva, i brojem takovih divizora, koji su lihe potencije prostih brojeva; 1 valja računati k prvoj vrsti.

$$7)\quad f(n) = (-1)^{e(n)}\nu(n)c(n),\quad \sigma f(n) = v'''(n)c(n).$$

Dobivamo:

$$1 + \sum_d^n c(d)v'''(d) \sum_t^d c(t)\nu(t) = 2\sum_d^n c(d)v'''(d).$$

Za $c(n) = n$ pokazuje

$$\sum_d^n c(d)\nu(d) - 1 = \sigma(n)$$

zbroj svih različitih prostih brojeva, od kojih je n sastavljen.

Digitized by Google

Stoga možemo napisati:

$$1 + \sum_{d}^{n} d\, v'''(d)\, \sigma\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d}^{n} d v'''(d).$$

Stavimo li $c(n) = 1$, izići će:

$$1 + \sum_{d}^{n} v'''(d) \tau\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d}^{n} v'''(d).$$

$v'''(n)$ možemo odrediti tako, te nam ova jednadžba podaje zanimljivu relaciju među izvjesnim permutacijama. Ako n ima oblik $p_1 p_2 \dots p_r$, gdje su $p_1, p_2, \dots p_r$ sami različiti prosti brojevi, prijeći će zadnja jednadžba u ovu:

$$1 + r + \binom{r}{1} 1!\,(r-1) + \binom{r}{2} 2!\,(r-2) + \dots + \binom{r}{r-1} (r-1)! =$$

$$1 + \binom{r}{1} 1! + \binom{r}{2} 2! + \binom{r}{3} 3! + \dots + \binom{r}{r} r!$$

U toj su jednadžbi članovi s lijeve i desne strane redom jednaki.

Isto se tako lako uvjerimo o ispravnosti gornje jednadžbe za $n = p^{\alpha}$.

Za $n = 12$ izlazi:

$$1 + v'''(1)\tau(12) + v'''(2)\tau(6) + v'''(3)\tau(4) + v'''(4)\tau(3) + v'''(6)\tau(2) + v'''(12)\tau(1) =$$
$$1 + \quad 2 \quad + \quad 2 \quad + \quad 1 \quad + \quad 1 \quad + \quad 2 \quad + \quad 0 \quad = 9$$
$$v'''(1) + v'''(2) + v'''(3) + v'''(4) + v'''(6) + v'''(12) =$$
$$1 + \quad 1 \quad + \quad 1 \quad + \quad 1 \quad + \quad 2 \quad + \quad 3 \quad = 9.$$

Još neka se stavi za $c(n)$ funkcija $\lambda(n)$. Dobivamo:

$$1 - \sum_{d}^{n} \lambda(d) v'''(d) \tau\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d}^{n} \lambda(d) v'''(d);$$

Digitized by Google

n. pr. za $n = 12$:

$$1 - \lambda(1)v'''(1)\tau(12) - \lambda(2)v'''(2)\tau(6) - \lambda(3)v'''(3)\tau(4) - \lambda(4)v'''(4)\tau(3) - \lambda(6)v'''(6)\tau(2) =$$
$$1 \quad - \quad 2 \quad + \quad 2 \quad + \quad 1 \quad - \quad 1 \quad - \quad 2 \quad = \quad 1$$
$$\lambda(1)v'''(1) + \lambda(2)v'''(2) + \lambda(3)v'''(3) + \lambda(4)v'''(4) + \lambda(6)v'''(6) + \lambda(12)v'''(12) =$$
$$1 \quad - \quad 1 \quad - \quad 1 \quad + \quad 1 \quad + \quad 2 \quad - \quad 3 \quad = \quad -1.$$

8) $$f(n) = \varphi(n), \quad \sigma f(n) = \varphi'(n).$$

U tom slučaju dobivamo već poznatu relaciju (24''). No ako uvrstimo u (10): $f(n) = \varphi'(n)$, $\sigma f(n) = \varphi(n)$, dobit ćemo:

$$\sum_{d}^{n} \varphi(d) \sum_{t}^{\frac{n}{d}} \varphi'(t) = 1.$$

Obazremo li se na to, da je:

$$\varphi'(m)\varphi'(n) = \varphi'(mn),$$

ako su m i n među sobom prosti brojevi, to nalazimo, da je prema (24):

$$\sum_{d}^{n} \varphi'(d) = \prod_{1}^{r}{}_{i} \left[1 + \varphi'(p_i) + \varphi'(p_i^2) + \varphi'(p_i^3) + \ldots\ldots + \varphi(p_i^{\alpha_i}) \right]$$

ili:

$$\sum_{d}^{n} \varphi'(d) = \prod_{1}^{r}{}_{i} \left[1 + \alpha_i (1 - p_i) \right].$$

Taj je izraz samo onda jednak 0, ako je:

$$n \equiv 0, \quad \frac{n}{2} \equiv 1, \quad (2).$$

Slični resultati izlaze, ako se mjesto $\varphi(n)$, $\varphi'(n)$ uzmu funkcije $\varphi_k(n)$, $\varphi^{(k)}(n)$.

Digitized by Google

9) $f(n) = c(n)\varkappa(n)$, $\sigma f(n) = c(n)\varkappa(n)$ daje:

$$\sum_{d}^{n} c(d)\varkappa(d) \sum_{t}^{\frac{n}{d}} c(t)\varkappa(t) = 1.$$

Za $c(n) = 1$ izlazi relacija (28). Stavimo li $c(n) = n$, podaje:

$$\sum_{d}^{n} d\varkappa(d) = T(n)$$

zbroj svih kvadratnih divizora broja n. Za nj vrijedi dakle relacija:

$$\sum_{d}^{n} d\varkappa'(d)\, T\left(\frac{n}{d}\right) = 1.$$

Za broj $n = 2^2.3^2$ imamo divizore u obliku (26):

$$1, \quad 2^2, \quad 3^2, \quad 2^2.3^2.$$

Stoga mora biti:

$$T(2^2.3^2) - 2^2 T(3^2) - 3^2 T(2^2) + 2^2.3^2 T(1) = 1,$$

a to je istinito, jer je:

$$T(2^2.3^2) = 50, \quad T(3^2) = 10, \quad T(2^2) = 5, \quad T(1) = 1.$$

Da smo za $c(n)$ uzeli n^k, dobili bismo sličnu relaciju.

9') $f(n) = c(n)\varkappa'(n)$, $\sigma f(n) = c(n)\varkappa(n)$.

Odatle jednadžba:

$$\sum_{d}^{n} c(d)\varkappa(d) \sum_{t}^{\frac{n}{d}} c(t)\varkappa'(t) = 1.$$

Digitized by Google

Za $c(n) = 1$ izlazi relacija (27). Ako pak stavimo $c(n) = n$, podaje:

$$\sum_{d}^{n} d\varkappa'(d) = T'(n)$$

razliku među zbrojem divizorâ broja n u obliku (26) sa takim brojem prostih faktora i zbrojem takovih divizora sa lihim brojem prostih faktora; 1 treba računati k prvoj vrsti.

Valja dakle jednadžba:

$$\sum_{d}^{n} d\varkappa(d) T\left(\frac{n}{d}\right) = 1$$

ili drukčije pisano:

$$\sum_{d^2}^{n} d^2 T'\left(\frac{n}{d^2}\right) = 1.$$

Za $n = 36$ imamo dakle:

$$T(36) + 4T(9) + 9T(4) + 36T(1) =$$
$$= 24 - 32 - 27 + 36 = 1.$$

Tim smo na nekoliko primjera pokazali primjenu relacije (10), pa ćemo prijeći k jednadžbi (2) uz pretpostavku, da postoje jednadžbe (1). Za funkcije f, g, F, G uvest ćemo funkcije, što sam ih ja uveo u ovoj radnji. Tim ćemo dobiti niz novih relacija.

I. Za $f(n) = \nu(n)$, $F(n) = 1 + \tau(n)$ dobiva (2) ovaj oblik:

$$\sum_{d>1}^{n} G\left(\frac{n}{d}\right)\nu(d) = \sum_{d}^{n} g(d)\tau\left(\frac{n}{d}\right).$$

Označimo li proste brojeve, od kojih je n sastavljen, sa p_1, $p_2, \ldots . p_r$, možemo tu jednadžbu napisati i ovako:

$$\sum_{i=1}^{r} G\left(\frac{n}{p_i}\right) = \sum_{d}^{n} g(d)\tau\left(\frac{n}{d}\right).$$

Digitized by Google

A sada treba samo uvrstiti za $g(n)$ i $G(n)$ funkcije, koje stoje u svezi:

$$G(n) = \sum_{d}^{n} f(d),$$

da dobijemo cio niz relacija.

Tako dobivamo:

a) za $g(n) = 1$, $G(n) = \vartheta(n)$:

$$\sum_{d}^{n} \tau(d) = \sum_{i=1}^{r} \vartheta\left(\frac{n}{p_i}\right);$$

b) za $g(n) = n$, $G(n) = s(n)$:

$$\sum_{d}^{n} d\tau\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{i=1}^{r} s\left(\frac{n}{p_i}\right);$$

u opće za $g(n) = n^k$, $G(n) = s_k(n)$:

$$\sum_{d}^{n} d^k \tau\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{i=1}^{r} s_k\left(\frac{n}{p_i}\right);$$

c) za $g(n) = \lambda(n)$, $G(n) = \varkappa(n)$:

$$\sum_{d}^{n} \lambda(d)\tau\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{i=1}^{r} \varkappa\left(\frac{n}{p_i}\right);$$

d) za $g(n) = \pi(n)$, $G(n) = 1 + \alpha(n)$:

$$\tau(n) + \sum_{i=1}^{n} \alpha\left(\frac{n}{p_i}\right) = \alpha(n) + \sum_{d}^{n} \pi(d)\tau\left(\frac{n}{d}\right);$$

e) za $g(n) = \varphi(n)$, $G(n) = n$:

Digitized by Google

$$\sum_{d}^{n}\varphi(d)\tau\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{i=1}^{r}\frac{n}{p_i};$$

f) za $g(n) = \omega(n)$, $G(n) = \theta(n^2)$ (prema Liouville-u):

$$\sum_{d}^{n}\omega(d)\tau\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{i=1}^{r}\theta\left[\left(\frac{n}{p_i}\right)^2\right];$$

g) za $g(n) = \theta(n^2)$, $G(n) = \theta^2(n)$ (prema Liouville-u):

$$\sum_{d}^{n}\theta(d^2)\tau\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{i=1}^{r}\theta^2\left(\frac{n}{p_i}\right);$$

h) za $g(n) = \varkappa(n)$, $G(n) = \theta_2(n)$:

$$\sum_{d^2}^{n}\tau\left(\frac{n}{d^2}\right) = \sum_{i=1}^{r}\theta_2\left(\frac{n}{p_i}\right);$$

i t. d.

II. Za $f(n) = \pi(n)$, $G(n) = 1 + \alpha(n)$ prelazi (2) u ovu jednadžbu:

$$\sum_{d>1}^{n}G\left(\frac{n}{d}\right)\pi(d) = \sum_{d}^{n}g(d)\varkappa\left(\frac{n}{d}\right)$$

ili:

$$\sum_{k=1}^{r}\sum_{i_k=1}^{\alpha_k}G\left(\frac{n}{p_k^{i_k}}\right) = \sum_{d}^{n}g(d)\varkappa\left(\frac{n}{d}\right).$$

N. pr.

a) za $g(n) = 1$, $G(n) = \theta(n)$:

$$\sum_{d}^{n}\alpha(d) = \sum\theta\left(\frac{n}{p^k}\right).$$

Digitized by Google

Ovdje i u primjerima, što još dolaze, valja pod Σ razumijevati dvostruki zbroj predzadnje jednadžbe.

b) za $g(n) = n^k$, $G(n) = s_k(n)$:

$$\sum_d^n d\varkappa\left(\frac{n}{d}\right) = \sum s_k\left(\frac{n}{p^k}\right);$$

c) za $g(n) = \lambda(n)$, $G(n) = \varkappa(n)$:

$$\sum_d^n \lambda(d)\varkappa\left(\frac{n}{d}\right) = \sum \varkappa\left(\frac{n}{p^k}\right);$$

d) za $g(n) = \varphi(n)$, $G(n) = n$,

$$\sum_d^n \varphi(d)\varkappa\left(\frac{n}{d}\right) = \sum \frac{n}{p^k};$$

e) za $g(n) = \omega(n)$, $G(n) = \vartheta(n^2)$:

$$\sum_d^n \omega(d)\varkappa\left(\frac{n}{d}\right) = \sum \vartheta\left[\left(\frac{n}{p^k}\right)^2\right];$$

f) za $g(n) = \vartheta(n^2)$, $G(n) = \vartheta^2(n)$:

$$\sum_d^n \vartheta(d^2)\varkappa\left(\frac{n}{d}\right) = \sum \vartheta^2\left(\frac{n}{p^k}\right);$$

g) za $g(n) = \varkappa(n)$, $G(n) = \vartheta_2(n)$:

$$\sum_d^n \varkappa\left(\frac{n}{d^2}\right) = \sum \vartheta_2\left(\frac{n}{p^k}\right);$$

i t. d.

Digitized by Google

III. Uzmimo $f(n) = v(n)$, $F(n) = 2^{e(n)}v(n)$. Onda (2) dobiva oblik:

$$G(n) + \sum_{d>1}^{n} G\left(\frac{n}{d}\right) v(d) = g(n) + 2 \sum_{d>1}^{n} g\left(\frac{n}{d}\right) v(d), \quad n > 1.$$

Prema tomu je:

a) za $g(n) = \mu(n)$, $G(n) = 1 - e(n)$:

$$(32) \qquad v(n) = \mu(n) + 2 \sum_{d>1}^{n} v(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right).$$

Dakle je:

$$v(n) \equiv \mu(n), \quad (2),$$

kao što izlazi i iz Möbijeva stavka.

Jednadžbom je (32) traženje broja varijacija s ponavljanjem k produktu n znatno pokraćeno poradi toga, što je $\mu(n)$ za izvjesne brojeve jednako 0, tako da ne treba odrediti broj varijacija za sve divizore broja n, koji su manji od n. Tako je n. pr. za $n = 24 = 2^3 . 3$

$$v(24) = 2\left[v(24) - v(12) - v(8) + v(4)\right]$$

ili:

$$v(24) = 2\left[v(12) + v(8) - v(4)\right].$$

Nadalje je:

$$v(12) = 2\left[v(12) - v(6) - v(4) + v(2)\right]$$

ili:

$$v(12) = 2\left[v(6) + v(4) - v(2)\right] =$$
$$= 2(3 + 2 - 1) = 8.$$

Stoga je:

$$v(24) = 2(8+4-2) = 20.$$

b) za $g(n) = \nu(n)$, $G(n) = 1 + \tau(n)$:

Digitized by Google

$$\sum_{d}^{n}\left((1+\tau(d)\right)v\left(\frac{n}{d}\right)=\nu(n)+2\sum_{d<n}^{n}\nu(d)v\left(\frac{n}{d}\right)$$

ili:

$$2v(n)+\sum_{d}^{n}\tau(d)v\left(\frac{n}{d}\right)=\nu(n)\quad+2\sum_{d<n}^{n}\nu(d)v\left(\frac{n}{d}\right).$$

Ako n nije prost broj, možemo napisati:

$$2v(n)+\sum_{d}^{n}\tau(d)v\left(\frac{n}{d}\right)=2\sum_{i\ 1}^{r}v\left(\frac{n}{p_i}\right).$$

Odatle se vidi, da je

$$\sum_{d}^{n}\tau(d)v\left(\frac{n}{d}\right)\equiv 0,\quad (2),$$

ako n nije prost broj; ako je pak prost broj, vidi se iz predzadnje jednadžbe, da je taj zbroj lih.

c) za $g(n)=\pi(n)$, $G(n)=1+\alpha(n)$ vrijede slične relacije. Tu je

$$\sum_{d}^{n}\alpha(d)v\left(\frac{n}{d}\right)\equiv 0,\quad (2),$$

ako n nije potencija prosta broja, inače $\equiv 1$, (2).

d) za $g(n)=\varphi(n)$, $G(n)=n$:

$$\sum_{d}^{n}dv\left(\frac{n}{d}\right)=\varphi(n)+2\sum_{d<n}^{n}\varphi(d)v\left(\frac{n}{d}\right);$$

e) za $g(n)=\varkappa(n)$, $G(n)=\vartheta_2(n)$:

Digitized by Google

$$\sum_{d}^{n}\theta_2(d)v\left(\frac{n}{d}\right) = \varkappa(n)+2\sum_{d<n}^{n}\varkappa(d)v\left(\frac{n}{d}\right).$$

Ako je n potpun kvadrat, to je zbroj:

$$\sum_{d}^{n}\theta_2(d)v\left(\frac{n}{d}\right)$$

lih, inače tak.

IV. Neka bude u (10):

$$f(n) = \lambda(n), \quad F(n) = \varkappa(n);$$

onda će biti:

$$\sum_{d}^{n}G\left(\frac{n}{d}\right)\lambda(d) = \sum_{d}^{n}g\left(\frac{n}{d}\right)\varkappa(d) = \sum_{d^2}^{n}g\left(\frac{n}{d^2}\right).$$

Ne ćemo odavde izvoditi relacije, što ih je već Cesáro našao, nego neke nove. Tako imamo:

a) za $g(n) = \varkappa(n)$, $G(n) = \theta_2(n)$

$$\sum_{d}^{n}\lambda(d)\theta_2\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d^2}^{n}\varkappa\left(\frac{n}{d^2}\right) = \sum_{d}^{n}\varkappa(d)\varkappa\left(\frac{n}{d}\right).$$

Zadnja dva zbroja podaju broj svih kvadratnih divizora broja n, kojima su i komplementni divizori potpuni kvadrati.

b) za $g(n) = n\varkappa(n)$, $G(n) = T(n)$:

$$\sum_{d}^{n}\lambda(d)T\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d}^{n}d\varkappa(d)\varkappa\left(\frac{n}{d}\right).$$

Desna strana podaje zbroj svih kvadratnih divizora broja n, kojima su i komplementni divizori potpuni kvadrati.

Digitized by Google

c) za $g(n) = \nu(n)$, $G(n) = 1 + \tau(n)$:

$$\varkappa(n) + \sum_{d}^{n} \tau(d)\lambda\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d^2}^{n} \nu\left(\frac{n}{d^2}\right).$$

Desna strana podaje, ako n nije potpun kvadrat, broj svih prostih brojeva sadržanih u n, kojima su komplementni divizori potpuni kvadrati; ako li je n potpun kvadrat, za 1 više. Stoga se zadnja jednadžba može kraće napisati ovako:

$$\sum_{d}^{n} \tau(d)\lambda\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d^2<n}^{n} \nu\left(\frac{n}{d^2}\right).$$

d) za $g(n) = \pi(n)$, $G(n) = 1 + \alpha(n)$ dobivamo analogno:

$$\varkappa(n) + \sum_{d}^{n} \alpha(d)\lambda\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d^2}^{n} \pi\left(\frac{n}{d^2}\right).$$

Desna je strana u slučaju, da n nije potpun kvadrat, broj svih potencija prostih brojeva sadržanih u n, kojima su komplementni divizori potpuni kvadrati; inače za 1 više. Stoga opet možemo napisati kraće:

$$\sum_{d}^{n} \alpha(d)\lambda\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d^2<n}^{d} \pi\left(\frac{n}{d^2}\right).$$

e) za $g(n) = n\nu(n)$, $G(n) = 1 + \sigma(n)$:

$$\varkappa(n) + \sum_{d}^{n} \sigma(d)\lambda\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d} d\nu(d)\varkappa\left(\frac{n}{d}\right).$$

Desna strana podaje, ako n nije potpun kvadrat, zbroj svih prostih brojeva sadržanih u n, kojima su komplementni divizori potpuni kvadrati; inače za 1 više. Zato je opet:

$$\sum_{d}^{n} \sigma(d)\lambda\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d^2<n}^{n} \frac{n}{d^2} \nu\left(\frac{n}{d^2}\right).$$

Digitized by Google

Slično za $g(n) = n\pi(n)$. I t. d.

V. Ako stavimo u (10)

$$f(n) = \varphi(n), \quad F(n) = n,$$

dobit ćemo:

$$\sum_d^n G\left(\frac{n}{d}\right)\varphi(d) = \sum_d^n dg\left(\frac{n}{d}\right).$$

Uzmimo, da je:

a) $g(n) = \varkappa(n)$, $G(n) = \theta_2(n)$. Onda je:

$$\sum_d^n \theta_2(d)\varphi\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d^2}^n \frac{n}{d^2};$$

b) za $g(n) = \varkappa'(n)$, $G(n) = 1 + \theta_2'(n)$:

$$n + \sum_d^n \theta_2'(d)\varphi\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_d^n d\varkappa'\left(\frac{n}{d}\right).$$

VI. Neka bude:

$$f(n) = \varkappa(n), \quad F(n) = \theta_2(n);$$

onda je:

$$\sum_d^n G\left(\frac{n}{d}\right)\varkappa(d) = \sum_d^n g\left(\frac{n}{d}\right)\theta_2(d).$$

Tako imamo:

a) za $g(n) = 1$, $G(n) = \theta(n)$:

$$\sum_{d^2}^n \theta\left(\frac{n}{d^2}\right) = \sum_d^n \theta_2(d).$$

Digitized by Google

N. pr. za $n = 12 = 3 \cdot 2^2$:

$$\vartheta(12) + \vartheta(3) = 6+2 = 8$$
$$\vartheta_2(1)+\vartheta_2(2)+\vartheta_2(3)+\vartheta_2(4)+\vartheta_2(6)+\vartheta_2(12) =$$
$$= 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 2 = 8.$$

Iz jednadžbe:

$$\sum_d^n \vartheta(d)\varkappa\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_d^n \vartheta_2(d)$$

izvodimo, da je:

$$\vartheta(n) = \sum_d^n \vartheta_2(d)\vartheta_2'\left(\frac{n}{d}\right).$$

Za $n = 12$ imamo:

$$\vartheta(12) = 6,$$
$$\vartheta_2(1)\vartheta_2'(12)+\vartheta_2(2)\vartheta_2'(6)+\vartheta_2(3)\vartheta_2'(4)+\vartheta_2(4)\vartheta_2'(3)+\vartheta_2(6)\vartheta_2'(2)+\vartheta_2(12)\vartheta_2'(1) =$$
$$= 0 + 1 + 0 + 2 + 1 + 2 = 6.$$

b) za $g(n) = n^k$, $G(n) = s_k(n)$:

$$\sum_{d^2}^n s_k\left(\frac{n}{d^2}\right) = \sum_d^n d^k \vartheta_2\left(\frac{n}{d}\right);$$

napose za $k = 1$:

$$\sum_{d^2}^n s\left(\frac{n}{d^2}\right) = \sum_d^n d\vartheta_2\left(\frac{n}{d}\right).$$

N. pr. za $n = 18$:

$$s(18) + s(2) = 39 + 3 = 42$$
$$\vartheta_2(18)+2\vartheta_2(9)+3\vartheta_2(6)+6\vartheta_2(3)+9\vartheta_2(2)+18\vartheta_2(1) =$$
$$= 2 + 4 + 3 + 6 + 9 + 18 = 42.$$

Digitized by Google

c) za $g(n) = \varkappa'(n)$, $G(n) = \vartheta_2'(n)$:

$$\sum_{d^3}^{n} \vartheta_2'\left(\frac{n}{d^2}\right) = \sum_{d}^{n} \vartheta_2(d)\varkappa'\left(\frac{n}{d}\right).$$

I t. d.

Pošto smo na taj način istražili svezu među aritmetičnim funkcijama, koje zadovoljavaju jednadžbu (3), i naveli nekoliko posebnih slučajeva, prijeći ćemo k primjeni nađenih resultata na osobitu vrstu transformacije nizova.

Möbius je naišao na varijacije s ponavljanjem k produktu n baveći se jednim problemom o obratu uzmnožnih nizova. Kod te je zgode otkrio relaciju:

$$x = \sum_{n\ 1}^{\infty} \frac{\mu(n)x^n}{1-x^n}, \tag{33}$$

iz koje izlazi za eksponencijalnu funkciju e^x razvoj:

$$e^x + \prod_{1}^{\infty} (1-x^n)^{\frac{\mu(n)}{n}}. \tag{33'}$$

Kasnije navodi Lipschitz[1] jednadžbu:

$$e^{\frac{x}{1-x}} = \prod_{1}^{\infty} (1-x^n)^{\frac{\varphi(n)}{n}}. \tag{34}$$

Navedeni razvoji (33') i (34) zanimljivi su sa dva gledišta, s gledišta teorije funkcija i s gledišta teorije brojeva. Teorija funkcija uči, kako se dade cijela transcendentna funkcija, koja u izvjesnim konačnim točkama iščezava, s pomoću tih točaka prikazati u obliku produkta. Kako eksponencijalna funkcija ni u jednoj konačnoj

[1] Comptes Rendus, sveska 99.

Digitized by Google

točki ne iščezava, ne da se za nju odrediti takav produkt. Stoga su razvoji od oblika (33′) i (34) zanimljivi, jer nam daju za eksponencijalnu funkciju produkt osobita oblika valjan bar za neki opseg mjenljivice. Nadalje se pojavljuju u tim razvojima neke aritmetične funkcije, pa će biti zanimljivo istražiti, kakova su im svojstva i u kojoj su zavisnosti o eksponentu osnovke e i osnovci pojedinoga faktora u produktu.

Produkti (33′) i (34) nijesu jedini produkti te vrste za eksponencijalnu funkciju. Ima ih beskonačno mnogo. Oni se mijenjaju s eksponentom osnovke e i osnovkama faktora u produktu, a i aritmetične funkcije u njima. Kako je onim, što je sprijeda razvijeno, stečena općena podloga za istraživanje tih produkta, bit će zgodno, da se ovdje tim istraživanjem malo pozabavimo.

Logaritmiranjem i diferenciranjem jednadžbi (33′) i (34) izlaze s obje strane nizovi osobita oblika. Poći ćemo od njih.

Neka sasvim općeno postoji u nekom opsegu konvergentnosti jednadžba:

$$(35) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} C(n) f(x^n) = \sum_{n=1}^{\infty} C_1(n) f_1(x^n),$$

u kojoj su $C(n)$ i $C_1(n)$ aritmetične funkcije, a $f(x^n)$ i $f_1(x^n)$ uzmnožni nizovi od oblika:

$$f(x^n) = \sum_{n=1}^{\infty} c(r) x^{rn}, \quad f_1(x^n) = \sum_{n=1}^{\infty} c_1(r) x^{rn},$$

gdje su $c(r)$ i $c_1(r)$ opet dvije aritmetične funkcije.

Uzmimo, da su ispunjeni uvjeti, pod kojima se smiju članovi dvostrukih zbrojeva, što stoje u (35), poređati po potencijama mjenljivice x. Poređamo li ih onda tako i sravnimo koeficijente jednako visokih potencija x-a s obje strane jednadžbe, dobit ćemo za aritmetične funkcije $c(n)$, $c_1(n)$, $C(n)$, $C_1(n)$ snošaj:

$$(36) \qquad \sum_{d}^{n} C(d) c\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d}^{n} C_1(d) c_1\left(\frac{n}{d}\right)$$

za svaki n.

Digitized by Google

No to je baš snošaj, od koga smo pošli u početku ove radnje. Stoga ćemo se moći pri istraživanju jednadžbe (36) u obilnoj mjeri poslužiti već stečenim resultatima. Uzet ćemo i ovdje, da je vrijednost svih četiriju aritmetičnih funkcija u (36) za $n = 1$ jednaka 1.

Neka bude ponajprije:

$$C(1) = 1, \quad C(n) = 0 \text{ za } n > 1;$$

drugim riječima: valja istražiti transformaciju niza $f(x)$ u niz, kojega su članovi uzmnožni nizovi od oblika

$$C_1(n) f_1(x^n).$$

U tom slučaju dobivamo za $C_1(n)$ relaciju:

$$C_1(n) = \sum_d^n c(d) \sigma c_1 \left(\frac{n}{d}\right).$$

Transformira li se niz:

$$f_1(x^n) = \sum_{n=1}^{\infty} c_1(n) x^n$$

u niz, kojega su članovi uzmnožni nizovi od oblika

$$C(n) f(x^n),$$

izlazi za $C(n)$ jednadžba:

$$C(n) = \sum_d^n c_1(d) \sigma c \left(\frac{n}{d}\right).$$

Dakle je, kako otprije znamo:

(37) $$C_1(n) = \sigma C(n), \quad C(n) = \sigma C_1(n).$$

Digitized by Google

Navest ću nekoliko primjera transformacije te vrste.

$$1) \quad f(x) = x, \quad f_1(x) = \frac{x}{1-x}.$$

U tom je slučaju:

$$c(1) = 1, \quad c(n) = 0, \quad \text{ako je} \quad n > 1,$$
$$c_1(n) = 1;$$

stoga je:

$$C_1(n) = \mu(n),$$

tako da izlazi Möbiusova relacija:

$$(38) \qquad x = \sum_{n\ 1}^{\infty} \frac{\mu(n)x^n}{1-x^n}$$

za sve vrijednosti mjenljivice x, za koje je $|x| < 1$.

Svi razvoji, što ću ih još odrediti, valjaju sigurno bar za unutarnje točke kruga opisana iz točke 0 s polumjerom 1; neki još i za izvjesne točke obodnice toga kruga.

Integracijom izvodimo iz zadnje jednadžbe ovu:

$$(38') \qquad -x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n}\, l(1-x^n),^{1}$$

a možemo je napisati također u obliku:

$$e^x = \prod_{1}^{\infty} (1-x^n)^{\frac{\mu(n)}{n}}.$$

Jednadžbu (38′) mogli smo također izvesti izravnom transformacijom x-a u niz, kojega članovi imadu oblik $C_1(n)\, l(1-x^n)$.

S obzirom na (37) mora biti

[1] Pod $l\,x$, arc tg x i korijenom treba svagdje u ovoj radnji razumjeti glavnu vrijednost dotične funkcije.

Digitized by Google

$$\sigma\mu(n) = 1,$$

a tu relaciju poznajemo već otprije.

$$2) \quad f(x) = x, \quad f_1(x) = \frac{x}{1+x}.$$

Tu je:

$$c(1) = 1, \quad c(n) = 0, \quad \text{ako je} \quad n > 1;$$
$$c_1(n) = (-1)^{n+1}.$$

Stoga izlazi jednadžba:

$$(39) \qquad x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_1(n) x^n}{1+x^n}.$$

Iz nje dobivamo integracijom:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_1(n)}{n} l(1+x^n),$$

a odatle:

$$e^x = \prod_{1}^{\infty} (1+x^n)^{\frac{\mu_1(n)}{n}}.$$

Podvrći ćemo jednadžbe (38) i (39) još i diferencijaciji, pa ćemo izvesti ove snošaje:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\mu(n)x^n}{(1-x^n)^2},$$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\mu_1(n)x^n}{(1+x^n)^2}.$$

$$2') \quad f(x) = x + ax^2, \quad f_1(x) = \frac{x}{1-x} \quad \text{ili} \quad \frac{x}{1+x}.$$

Lako ćemo naći, da je:

Digitized by Google

$$x+ax^2=\sum_{n\ 1}^{\infty}\frac{\rho(n)x^n}{1-x^n}, \tag{40}$$

$$x+ax^2=\sum_{n\ 1}^{\infty}\frac{\rho_1(n)x^n}{1+x^n}, \tag{40'}$$

gdje smo uveli pokrate:

$$\rho(n)=\mu(n)+\frac{a}{2}\left[1+(-1)^n\right]\mu\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right),$$

$$\rho_1(n)=\mu_1(n)+\frac{a}{2}\left[1+(-1)^n\right]\mu_1\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right);$$

$\left[\frac{n}{2}\right]$ je najveći cijeli broj sadržan u razlomku $\frac{n}{2}$.

Iz (40) i (40') možemo izvesti beskonačne produkte:

$$e^{-(x+ax^2)}=\prod_{1}^{\infty}(1-x^n)^{\frac{\rho(n)}{n}},$$

$$e^{x+ax^2}=\prod_{1}^{\infty}(1+x^n)^{\frac{\rho_1(n)}{n}}.$$

3) $f(x)=x,\quad f_1(x)=\frac{x}{1-x^2}.$

Ovdje je:

$$c(1)=1,\quad c(n)=0,\quad \text{ako je}\quad n>1,$$
$$c_1(2k)=0,\quad c_1(2k+1)=1.$$

Stoga je:

$$C_1(2k)=0,\quad C_1(2k+1)=\mu(2k+1).$$

Prema tomu dobivamo relaciju:

$$x=\sum_{k\ 0}^{\infty}\frac{\mu(2k+1)x^{2k+1}}{1-x^{2(2k+1)}}. \tag{41}$$

Digitized by Google

Sjetimo li se, da je:

$$\int \frac{nx^{n-1}dx}{1-x^{2n}} = \frac{1}{2}\, l\, \frac{1+x^n}{1-x^n} + \text{Const.},$$

dobit ćemo iz predzadnje jednadžbe:

$$2x = \sum_{k\ 0}^{\infty} \frac{\mu(2k+1)}{2k+1}\, l\, \frac{1+x^{2k+1}}{1-x^{2k+1}}$$

ili dalje:

$$e^{2x} = \prod_{0}^{\infty} \left| k \right| \left(\frac{1+x^{2k+1}}{1-x^{2k+1}} \right)^{\frac{\mu(2k+1)}{2k+1}}.$$

4) $f(x) = x, \quad f_1(x) = \text{arc tg}\, x.$

Ova se transformacija može postići također tim, da stavimo na mjesto x-a u jednadžbu (41) ix. Učinimo li to, izvest ćemo lako ovu relaciju:

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \mu(2k+1) x^{2k+1}}{1+x^{2(2k+1)}},$$

a iz nje dobivamo integracijom:

$$x = \sum \frac{(-1)^k \mu(2k+1)}{2k+1} \text{arc tg}\, x^n.$$

Da smo tu jednadžbu izveli izravno običnom transformacijom, bili bismo dobili, ako stavimo:

$$x = \sum_{n\ 1}^{\infty} C_1(n) \text{arc tg}\, x^n,$$

budući da je:

Digitized by Google

$$(42) \qquad \operatorname{arc\,tg} x = \sum_{k\ 0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1},$$

za aritmetičnu funkciju $C_1(n)$ ove vrijednosti:

$$C_1(2k) = 0, \quad C_1(2k+1) = \frac{1}{2k+1}\,\sigma\,(-1)^k.$$

Vidimo dakle bez osobita određivanja funkcije $\sigma(-1)^k$ za pojedine slučajeve, da je:

$$(43) \qquad \sigma(-1)^{\frac{n-1}{2}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\,\mu(n)$$

$$\text{za} \quad n \equiv 1, \quad (2).$$

A to mora tako i biti, jer je:

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}}\,(-1)^{\frac{n-1}{2}} = (-1)^{\frac{mn-1}{2}}.$$

Iz (37) izlazi, da je:

$$\sigma\left[(-1)^{\frac{n-1}{2}}\,\mu(n)\right] = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

ili da niz za $\operatorname{arc\,tg} x$ glasi onako, kako pokazuje formula (42).

$$5) \quad f(x) = x, \quad f_1(x) = \frac{x(1-2x)}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{e(n)} x^n.$$

Prema tomu je:

$$C_1(n) = v(n),$$

te dobivamo relaciju:

$$(44) \qquad x = \sum_{n\ 1}^{\infty} \frac{v(n)x^n(1-2x^n)}{1-x^n}.$$

Digitized by Google

Da zbroj s desne strane jednoliko konvergira za vrijednosti mjenljivice x, za koje je $|x|<1$, možemo se direktno uvjeriti ovako. Ponajprije je:

$$\text{(a)} \qquad \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v(n)x^n(1-2x^n)}{1-x^n}\right| < \frac{1+2|x|}{1-|x|}\sum_{n=1}^{\infty}v(n)x|x|^n.$$

Obilježimo li, ako n sadržava k bilo jednakih bilo različitih prostih brojeva, sa $v_1, v_2, v_3, \ldots v_k$ broj varijacija s ponavljanjem k produktu n prvoga, drugoga, ... k-toga razreda, ako pak n sadržava $k+1$ bilo jednakih bilo različitih faktora, sa $V_1, V_2, V_3, \ldots V_{k+1}$ broj varijacija s ponavljanjem k produktu n prvoga, drugoga, ... $(k+1)$-toga razreda, to postoje snošaji:

$$\begin{aligned}
V_1 &= v_1,\\
V_2 &< 2(v_1+v_2),\\
V_3 &< 3(v_2+v_3),\\
&\text{- - - - - - - - - - - -}\\
V_k &< k(v_{k-1}+v_k),\\
V_{k+1} &< (k+1)v_k.
\end{aligned}$$

Stavimo li:

$$\begin{aligned}
v &= v_1+v_2+v_3+\ldots+v_k,\\
V &= V_1+V_2+V_3+\ldots+V_k,
\end{aligned}$$

to je:

$$\text{(b)} \qquad V<(2k+1)v,$$

a stoga:

$$V<(2.1+1)\ (2.2+1)\ (2.3+1)\ldots.(2k+1),$$

kako se lako uvjerimo, ako relaciju (b) razvijemo redom za $k=0$, 1, 2, 3, ... Stavit ćemo:

$$|x|=\frac{1}{a},$$

gdje je $a>1$. Budući da je:

$$n>2^k,$$

Digitized by Google

ako u n ima sadržanih k bilo jednakih bilo nejednakih prostih faktora, to je:

$$v(n)|x|^n < \frac{(2.1+1)\,(2.2+1)\,(2.3+1)\,\ldots\,\Big(2(k-1)+1\Big)}{a^{2^k}}$$

Ali je:

$$\lim_{k=\infty} \frac{(2.1+1)\,(2.2+1)\,(2.3+1)\,\ldots\,\Big(2(k-1)+1\Big)}{a^{2^k}} = 0.$$

Stoga niz:

$$\sum_{n\ 1}^{\infty} v(n)\,|\,x\,|^{\,n}\,,$$

a prema (a) i zbroj u jednadžbi (44) konvergira jednoliko za rečene vrijednosti mjenljivice.

$$6) \quad f(x) = \frac{x}{1-x}, \quad f_1(x) = \frac{x}{1+x}.$$

Kako je u tom slučaju:

$$c(n) = 1, \quad c_1(n) = (-1)^{n+1},$$

dobivamo:

$$C_1(n) = \sum_{d}^{n} \mu_1(d).$$

No taj je zbroj, kako već prije spomenusmo, samo za brojeve od oblika 2^α različit od 0, a onda jednak 2^α.

Stoga je:

$$\frac{x}{1-x} = \sum_{\alpha\ 0}^{\infty} \frac{2^\alpha x^{2^\alpha}}{1+x^{2^\alpha}}.$$

Integracijom izlazi odatle:

Digitized by Google

$$-l(1-x) = \sum_{\alpha\ 0}^{\infty} 2^{\alpha} l(1+x^{2^{\alpha}})$$

ili:

$$\frac{1}{1-x} = \prod_{0}^{\infty} (1+x^{2^{\alpha}}),$$

a to je poznata Eulerova relacija.

Želimo li dobiti razvoj za $\frac{x}{1+x}$ u niz, kojega članovi imadu oblik $C(n)\frac{x^n}{1-x^n}$, naći ćemo za $C(n)$ s obzirom na (37):

$$C(1) = 1, \quad C(2) = -2, \quad C(n) = 0, \text{ ako je } n > 2.$$

Pa u istinu valja jednadžba:

$$\frac{x}{1+x} = \frac{x}{1+x} - \frac{2x^2}{1-x^2}.$$

7) $$f(x) = \frac{x}{1-x}, \quad f_1(x) = \frac{x}{1-x^2}.$$

Ako uvedemo pokratu:

$$\varepsilon_1(n) = \frac{1-(-1)^n}{2},$$

možemo za $C_1(n)$ napisati jednadžbu:

$$C_1(n) = \sum_{d}^{n} \varepsilon_1(d)\mu(d),$$

a to je samo onda, ako n ima oblik 2^{α}, jednako 1, inače je jednako 0. Dakle valja ovaj razvoj:

Digitized by Google

$$\frac{x}{1-x} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{x^{2^\alpha}}{1-x^{2^{\alpha+1}}}.$$

Iz njega dobivamo integracijom:

$$-2l(1-x) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{2^\alpha} l \frac{1+x^{2^\alpha}}{1-x^{2^\alpha}}$$

ili:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \prod_{0}^{\infty}{}_{\alpha} \left(\frac{1+x^{2^\alpha}}{1-x^{2^\alpha}} \right)^{\frac{1}{2^\alpha}}.$$

8) $f(x) = \frac{x}{1-x}$, $f_1(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

Brzo ćemo naći, da je za taj slučaj:

$$C_1(n) = \sum_{d}^{n} (-1)^{\frac{d-1}{2}} \varepsilon_1(d)\mu(d).$$

Da nađemo vrijednost toga zbroja, stavit ćemo:

$$n = 2^\alpha p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots\ldots p_r^{\alpha_r} q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \ldots\ldots q_s^{\beta_s},$$

gdje su p prosti brojevi od oblika $4k+1$, a q prosti brojevi od oblika $4k-1$. Sve divizore broja n, koji u zbroj $\chi_1(n)$ daju od 0 različit pribrojnik, naći ćemo, ako odredimo sve divizore broja:

$$m = p_1 p_2 \ldots\ldots p_r q_1 q_2 \ldots\ldots q_s.$$

Svaki će takav divizor dati u rečeni izraz $\chi_1(n)$ član $+1$, ako sadržava tak broj prostih brojeva, a među njima tak broj prostih brojeva q, ili pak ako sadržava lih broj prostih brojeva, a među njima lih broj prostih brojeva q; u svakom drugom slučaju član -1. Prema tomu će biti:

Digitized by Google

$$\chi_1(n) = \left[\binom{s}{0}+\binom{s}{2}+\binom{s}{4}+\ldots\ldots\right]\left[\binom{r}{0}+\binom{r}{2}+\binom{r}{4}+\ldots\ldots\right]$$
$$+\left[\binom{s}{1}+\binom{s}{3}+\binom{s}{5}+\ldots\ldots\right]\left[\binom{r}{0}+\binom{r}{2}+\binom{r}{4}+\ldots\ldots\right]$$
$$-\left[\binom{s}{0}+\binom{s}{2}+\binom{s}{4}+\ldots\ldots\right]\left[\binom{r}{1}+\binom{r}{3}+\binom{r}{5}+\ldots\ldots\right]$$
$$-\left[\binom{s}{1}+\binom{s}{3}+\binom{s}{5}+\ldots\ldots\right]\left[\binom{r}{1}+\binom{r}{3}+\binom{r}{5}+\ldots\ldots\right]$$

ili:

$$\chi_1(n) = \left[\binom{r}{0}-\binom{r}{1}+\binom{r}{2}-\binom{r}{3}\pm\ldots\ldots+(-1)^r\binom{r}{r}\right]2^s .$$

Ako dakle među prostim brojevima sadržanima u broju n ima bar jedan od oblika $4k+1$, mora biti $\chi_1(n)=0$, jer je onda uglata zagrada jednaka 0, ako su pak svi prosti brojevi sadržani u n od oblika $4k-1$, ima $\chi_1(n)$ vrijednost 2^s, gdje s podaje broj tih prostih brojeva. Tako definiranu aritmetičnu funkciju označit ćemo sa $\eta(n)$, te možemo napisati:

$$\eta(n) = \begin{cases} 2^s, \text{ ako je } n = 2^\alpha q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \ldots . q_s^{\beta_s}, \\ 0 \quad \text{u svakom drugom slučaju.} \end{cases}$$

Traženi razvoj glasit će dakle:

$$\frac{x}{1-x} = \sum_{n\ 1}^{\infty} \frac{\eta(n)x^n}{1+x^{2n}} .$$

Integracijom dobivamo odatle:

$$-l(1-x) = \sum_{n\ 1}^{\infty} \frac{\eta(n)}{n} \operatorname{arc\,tg} x^n .$$

Stavimo li:

$$\eta'(n) = \sigma\eta(n),$$

možemo također napisati ove jednadžbe:

Digitized by Google

$$\frac{x}{1+x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta'(n)x^n}{1-x^n}$$

i nadalje:

$$-\operatorname{arc\,tg} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta'(n)}{n}\, l\,(1-x). \tag{45}$$

Kako se funkcija $\eta(n)$ odlikuje tim, da je:

$$\eta(m)\ \eta(n) = \eta(mn),$$

izlazi, da je:

$$\eta'(n) = \sigma\eta(n) = \eta(n)\mu(n).$$

Dakle je $\eta'(n)$ samo za brojeve n od oblika

$$q_1 q_2 \ldots . q_s\ , \qquad 2q_1 q_2 \ldots . q_s$$

različito od 0 i onda jednako

$$(-1)^s 2^s \quad \text{ili} \quad (-1)^{s+1}2^s.$$

Da smo potražili $\eta'(n)$ bez pomoći funkcije $\eta(n)$, bili bismo za nju našli:

$$\eta'(n) = \sum_{d}^{n} (-1)^{\frac{d-1}{2}} \varepsilon_1(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right);$$

dakle je:

$$\sum_{d}^{n} (-1)^{\frac{d-1}{2}} \varepsilon_1(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right) = \sigma \sum_{d}^{n} (-1)^{\frac{d-1}{2}} \varepsilon_1(d)\mu(d).$$

Iz (45) zaključujemo, da je:

$$e^{-\operatorname{arc\,tg} x} = \prod_{1}^{\infty} (1-x^n)^{\frac{\eta'(n)}{n}}.$$

Digitized by Google

$$9)\quad f(x) = \frac{x}{1-x},\quad f_1(x) = \frac{x(1-2x)}{1-x}.$$

Ovdje je:

$$C_1(n) = \sum_d^n v(d) = 2^{\varepsilon(n)}\, v(n).$$

Postoji dakle relacija:

$$\frac{x}{1-x} = \frac{x(1-2x)}{1-x} + 2\sum_{x\ 2}^{\infty} \frac{v(n)x^n(1-2x^n)}{1-x^n}$$

ili također:

$$\frac{x^2}{1-x} = 2\sum_{x\ 2}^{\infty} \frac{v(n)x^n\,(1-2x^n)}{1-x^n},$$

a ta se jednadžba podudara sa (44).

$$10)\quad f(x) = \frac{x}{(1-x)^2},\quad f_1\,x) = \frac{x}{1-x}.$$

Za $C_1(n)$ dobivamo:

$$C_1(n) = \sum_d^n d\mu\left(\frac{n}{d}\right) = \varphi(n).$$

Dakle je:

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n\ 1}^{\infty} \frac{\varphi(n)x^n}{1-x^n},$$

a odatle:

$$\frac{x}{1-x} = -\sum_{n\ 1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n}\, l(1-x^n)$$

Digitized by Google

ili:

$$e^{\frac{x}{1-x}} \prod_{1}^{\infty} (1-x^n)^{\frac{\varphi(n)}{n}}.$$

$$11) \quad f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad f_1(x) = \frac{x}{1+x}.$$

U tom slučaju izlazi:

$$C_1(n) = \sum_{d}^{n} d\mu_1 \left(\frac{n}{d}\right) = \chi(n).$$

Ta aritmetična funkcija $\chi(n)$ jednaka je $\varphi(n)$, ako je n lih broj. Ako li je n tak broj, možemo staviti s obzirom na svojstva funkcije $\mu_1(n)$:

$$\chi(n) = \sum_{d} \left\{ \frac{n}{d}\mu_1(d) + \frac{n}{2d}\mu_1(2d) + \frac{n}{2^2 d}\mu_1(2^2 d) + \frac{n}{2^3 d}\mu_1(2^3 d) + \right.$$

$$\left. + \ldots + \frac{n}{2^\alpha d}\mu_1(2^\alpha d) \right\} =$$

$$= \sum_{d} \left\{ \frac{n}{d} + \alpha \frac{n}{2d} \right\} \mu(d),$$

gdje treba d da prođe sve lihe divizore broja n. Obazremo li se na to, da je:

$$\varphi(n) = \sum_{d} \left(\frac{n}{d} - \frac{n}{2d} \right) \mu(d) = \sum_{d} \frac{n}{2d} \mu(d),$$

ako je n tak broj, a d prolazi sve lihe divizore toga broja, naći ćemo s mjesta relaciju:

$$\chi(n) = (\alpha + 2)\, \varphi(n),$$

ako je:

Digitized by Google

$$n \equiv 0, \quad \frac{n}{2^\alpha} \not\equiv 0, \qquad (2).$$

Možemo napisati jednadžbu:

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n\ 1}^{\infty} \frac{\chi(n)x^n}{1+x^n},$$

a iz nje izvodimo:

$$\frac{x}{1+x} = \sum_{n\ 1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n}\, l\,(1+x^n),$$

$$e^{\frac{x}{1-x}} = \prod_{1}^{\infty} (1+x^n)^{\frac{\chi(n)}{n}}.$$

Stavimo li sada:

$$\sigma\varphi(n) = \varphi'(n), \quad \sigma\chi(n) = \chi'(n),$$

moći ćemo također napisati:

$$\frac{x}{1-x} = \sum_{n\ 1}^{\infty} \frac{\varphi'(n)x^n}{(1-x^n)^2},$$

$$\frac{x}{1+x} = \sum_{n\ 1}^{\infty} \frac{\chi'(n)x^n}{(1-x^n)^2}.$$

$\varphi'(n)$ nam je već poznata funkcija, za $\chi'(n)$ pak valja jednadžba:

$$\chi'(n) = n \sum_{d}^{n} (-1)^{d+1} \frac{\mu(d)}{d}.$$

12) $\quad f(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}, \quad f_1(x) = l\,(1-x).$

Digitized by Google

Za $C_1(n)$ nalazimo:

$$C_1(n) = n \sum_{d}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2} = n \prod_{1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i^2}\right) = \varphi_2(n),$$

ako je $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots . p_r^{\alpha_r}$.

Dakle je:

$$-\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n\ 1}^{\infty} \varphi_2(n) l(1-x^n),$$

a odatle:

$$e^{\frac{x}{(1-x)^2}} = \prod_{1}^{\infty} (1-x^n)^{\varphi_2(n)}.$$

13) $f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$, $f_1(x) = l(1+x)$.

Obilježimo li $C_1(n)$ u tom slučaju sa $\chi_2(n)$, to je:

$$\chi_2(n) = n \sum_{d}^{n} \frac{\mu_1(d)}{d^2}.$$

Dakle je $\chi_2(n) = \varphi_2(n)$ za lihe brojeve n, a u opće je:

$$\chi_2(n) = \frac{3.2^{\alpha}-1}{2} \varphi_2(n),$$

ako je:

$$\frac{n}{2^{\alpha}} \equiv 1, \qquad (2).$$

O tom se lako uvjerimo postupajući kao pod (11).

Valjaju jednadžbe:

Digitized by Google

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n\ 1}^{\infty} \chi_2(n)\, l(1+x^n),$$

$$e^{\frac{x}{(1-x)^2}} = \prod_{1}^{\infty} \left|n\right|\ (1+x^n)^{\chi_2(n)}.$$

14) $$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad f_1(x) = \frac{x}{1-x^2}.$$

Stoga:

$$C_1(n) = \sum_{d}^{n} d\sigma\varepsilon_1\left(\frac{n}{d}\right) = n\sum_{d} \frac{\mu(d)}{d};$$

u zadnjem zbroju prolazi d samo lihe divizore broja n. Vidimo dakle, da je za lihe brojeve n:

$$C_1(n) = \varphi(n).$$

Ako je pak $n = 2^{\alpha} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots\ldots p_r^{\alpha_r}$, a $\alpha > 0$, to je:

$$C_1(n) = n \prod_{1}^{r} \left|i\right| \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = 2\varphi(n).$$

Možemo općeno napisati:

$$C_1(n) = 2^{1-\varepsilon_1(n)}\varphi(n),$$

tako da valja jednadžba:

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n\ 1}^{\infty} \frac{2^{1-\varepsilon_1(n)}\varphi(n)x^n}{1-x^{2n}}.$$

Integracija nam daje:

Digitized by Google

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\ 1}^{\infty} \frac{2^{1-\varepsilon_1(n)}\varphi(n)}{n}\ l\ \frac{1+x^n}{1-x^n},$$

a odatle izlazi:

$$e^{\frac{1}{1-x}} = \prod_{1}^{\infty}{}_{n}\left(\frac{1+x^n}{1-x^n}\right)^{\frac{2^{1-\varepsilon_1(n)}\varphi(n)}{n}}$$

15) $f(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$, $f_1(x) = \frac{x}{1-x}$.

Za $C_1(n)$ dobivamo:

$$C_1(n) = \sum_{d}^{n}(-1)^{d+1}d\mu\left(\frac{n}{d}\right) = \psi(n).$$

Ako je $n = 2^{\alpha} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$, imamo:

$$\psi(n) = n \sum_{d}\left\{-\frac{\mu(d)}{d} - \frac{\mu(2d)}{2d}\right\},\ \text{ako je } \alpha > 1,\ \text{a}$$

$$\psi(n) = n \sum_{d}\left\{-\frac{\mu(d)}{d} + \frac{\mu(2d)}{2d}\right\},\ \text{ako je } \alpha = 1.$$

U zbrojevima treba d da prođe sve lihe divizore broja n. Za lihe je brojeve n:

$$\psi(n) = \varphi(n).$$

Lako se nađe, da vrijedi, ako je n tak, ovaj snošaj:

$$\psi(n) = \varphi(n) - 4\varphi\left(\frac{n}{2}\right)$$

ili, ako je $\alpha = 1$, da je $\psi(n) = \varphi(n)$, ako je pak $\alpha > 1$, da je $\psi(n) = -\varphi(n)$.

Digitized by Google

Na taj način dolazimo do jednadžbe:

$$-\frac{x}{1+x} = \sum_{n\ 1}^{\infty} \frac{\psi(n)}{n}\ l\,(1-x^n)$$

ili do beskonačnoga produkta:

$$e^{\frac{x}{1+x}} = \prod_{1}^{\infty} (1-x^n)^{\frac{\psi(n)}{n}}.$$

16) $f(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$, $f_1(x) = \frac{x}{1+x}$.

Postupamo li slično kao u predašnjem slučaju, naći ćemo, ako stavimo $C_1(n) = \psi_1(n)$:

$$\psi_1(n) = \sum_{d}^{n} (-1)^{d+1} d\mu_1\left(\frac{n}{d}\right),$$

a prema tomu, da je $\psi_1(n) = \chi(n)$, ako je n lih, ako li je tak, da valja snošaj:

$$\psi_1(n) = \chi(n) - 4\chi\left(\frac{n}{2}\right).$$

Stoga postoji jednadžba:

$$\frac{x}{(1+x)^2} = \sum_{n\ 1}^{\infty} \frac{\psi_1(n) x^n}{1+x^n}$$

ili dalje:

$$\frac{x}{1+x} = \sum_{n\ 1}^{\infty} \frac{\psi_1(n)}{n}\ l\,(1+x^n),$$

Digitized by Google

$$e^{\frac{x}{1+x}} = \prod_{1}^{\infty} (1+x^n)^{\frac{\psi_1(n)}{n}}.$$

17) $$f(x) = \frac{x}{(1+x)^2}, \quad f_1(x) = -l(1-x).$$

Tu valja jednadžba:

$$-\frac{x}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_2(n)\, l(1-x^n),$$

gdjeno stavismo:

$$\psi_2(n) = n \sum_{d}^{n} (-1)^{\frac{n}{d}+1} \frac{\mu(d)}{d^2},$$

a prema tomu:

$$e^{\frac{x}{(1+x)^2}} = \prod_{1}^{\infty} (1-x^n).$$

18) $$f(x) = \frac{x}{(1+x)^2}, \quad f_1(x) = l(1+x).$$

Stavimo:

$$\mathrm{X}(n) = n \sum (-1)^{\frac{n}{d}+1} \frac{\mu_1(d)}{d^2},$$

pa ćemo dobiti:

$$\frac{x}{(1+x)^2} = \sum_{n\ 1}^{\infty} \mathrm{X}(n)\, l(1+x^n),$$

$$e^{\frac{x}{(1+x)^2}} = \prod_{1}^{\infty} (1+x^n)^{\mathrm{X}(n)}.$$

Digitized by Google

19) $$f(x) = \frac{x}{1+x}, \quad f_1(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

Za $C_1(n)$ izlazi:

$$C_1(n) = \sum_d^n (-1)^{\frac{n}{d}-1} (-1)^{\frac{d-1}{2}} \varepsilon_1(d)\mu(d).$$

Dakle je za lihe n:

$$C_1(n) = \tau(n).$$

a za take:

$$C_1(n) = -\tau(n).$$

Stoga valja jednadžba:

$$\frac{x}{1+x} = \sum_{n\ 1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\tau(n)x^n}{1+x^{2n}}.$$

Iz nje izvodimo ove dvije:

$$l(1+x) = \sum_{n\ 1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\tau(n)}{n} \operatorname{arc\,tg} x^n$$

i:

$$\frac{x}{1+x^2} = \sum_{n\ 1}^{\infty} \frac{\tau(n)\mu_1(n)x^n}{1+x^n}.$$

Iz zadnje nam daje integracija:

$$\operatorname{arc\,tg} x = \sum_{n\ 1}^{\infty} \frac{\tau(n)\mu_1(n)}{n} l(1+x^n),$$

a prema tomu je:

Digitized by Google

$$e^{\operatorname{arc\,tg} x} = \prod_{1}^{\infty} \left| n \right| (1+x^n)^{\frac{\eta(n)\mu_1(n)}{n}}.$$

Pod pretpostavkom, da je u (35): $C(1) = 1$, a $C(n) = 0$, ako je $n > 1$, pokazali smo evo u nekoliko posebnih slučajeva, kako se zgodno primjenjuju naši resultati stečeni u prvom dijelu ove radnje. Isto se tako možemo poslužiti njima, ako je $C(n)$ funkcija koje druge vrste.

Digitized by Google

Revizija hrvatske flore.

(Revisio florae croaticae.)

Izrađena u botaničko-fiziologijskom zavodu kr. sveučilišta Franje Josipa I. u Zagrebu.

Primljeno u sjednici matematičko-prirodoslovnoga razreda Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti dne 7. svibnja 1904.

napisao Dragutin Hirc.

(Nastavak.)

Pedicularis L.

Gen. pl. n. 740.; L. Spec. pl. ed. I. (1753.) p. 607.

P. brachyodonta Schloss. et Vukot. — Syll. Fl. Cr. (1857.) p. 89. — Fl. Cr. p. 682. — Nyman Consp. Fl. Eur. (1878.—1882.) p. 554. — Kerner u Fl. exsicc. Austro-hung. br. 1400.; Schedae, fasc. IV. p. 55. (1886.) — E. de Halácsy Consp. Fl. Graecae (1902.), vol. II. p. 443.

Hans Steininger „Beschreibung der europäischen Arten des Genus *Pedicularis*“ u Botan. Centralblatt 1886. Bnd. XXVIII. i 1887. Bnd. XXIX. XXX.

Schlosser i Vukotinović obreli su ovaj *Pedicularis* na Kleku 19. lipnja g. 1852. (Vuk. herb. br. 2465/a.) te ga navode u svom putopisu „Geognostisch-botanischer Reisebericht über das kroatische Küstenland, das Likaner- und Otočaner Grenz-Regiment“ (p. 9.), kad su se iz gornje Krajine i hrvatskoga Primorja vraćali u Zagreb. U tom se putopisu ističe ova bilina kao *P. Barrelieri* Rchb. Fl. excurs. p. 362. nr. 2465. (1830.), no ovo je vrsta vapnenih Alpa; poznajemo je iz Dauphiné-a, Savoye i Piemonta, l' Aret au Brezona, Mont Gramiera (Vukotinović herb. br. 2465.), Alpes des Tende, i iz zapadnih kantona Švicarske (Wallis, Waadt, Genf,

Digitized by Google

Freiburg, Bern). — Schlosser je opisao ovaj Pedicularis sa Kleka kao *P. ochroleuca* u Botan. Wochenbl., VII. p. 248., Tommasini ga je posvetio dru. Schlosseru *(P. Schlosseri* in litteris 1853.), a Visiani Vukotinoviću *(P. Vukotinovići* in litt. 1856.)

Koliko je meni poznato, Josip je Pantocsek prvi, koji imajući pred sobom *P. Sibthorpii* Boiss. navodi *P. brachyodonta* kao „odliku" ove vrste, koju poznaje sa Bijele gore u Hercegovini (Adnotationes ad floram et faunam Hercegovinae, Crnae gorae et Dalmatiae. Posonii, 1874. p. 72.)

Nyman l. c. ističe „P. brachyodonta" kao „odliku" od *P. comosa* L., no Steininger, kojemu sam poslao bilinu na ogled, premda to u svojoj radnji ne spominje, vrsta je kao sinonim pod *P. comosa* L. (l. c. p. 248.) — Syn. *P. tuberosa* Vill. Hist. Dauph. II. p. 430. non L. — *P. leucodon* Rchb. fil. non Grieseb. in Icon. Fl. Germ. XX. p. 70. — *P. coronensis* Schur u Oesterr. Ztschr. X. p. 183.

Za Kernerovu Fl. exsicc. priposlao je potrebiti broj eksemplara Vukotinović, i ovaj ih je genijalni botaničar rasposlao među svoje suradnike kao *P. brachyodonta* upozorujući na opis u Fl. Cr. Kerner nije dvojio o valjanosti ove vrste, i zato nema na etiketi nikakovih razjašnjenja ili bilješki, što je on kod dvojbenih, sumnjivih i drugih bilina vazda činio ne obaziruć se kod toga ni na svoju osobu. Na ceduljici čitamo: „Croatia. In pratis alpinis montis Klek prope Ogulin; solo calc. 1400 m."[1] Po Kerneru dakle **P. brachyodonta** „nije" *P. comosa* L., pa ju je pod onim imenom predočio i Reichenbach u Iconographia XXX. tab. 134., a priznaje je kao vrstu i Halácsy, i s toga je ne napuštamo.

Pedicularis brachyodonta raste u istinu na Kleku, ali ne na njegovoj glavici, već pod njome na jednoj šumskoj, travom zarasloj čistini, gdje sam ga u najljepšem cvijetu sabirao 5. lipnja g. 1898. Raste tu u društvu sa *Lilium Carniolicum*, *Pyrethrum corymbosum*, *Anthyllis affinis* i *Centaurea montana.*

Vukotinović je bio na ovom mjestu (osim spomenute godine) i 5. srpnja 1877., 15. srpnja 1878. i 24. lipnja 1883. sabirući *P. brachyodonta* bilo u cvijetu, bilo u plodu za svoje brojne botaničke znance i prijatelje. Njegova je zasluga, da je po ovoj bilini po-

[1] Po generalštapskoj karti (Zona 24, Kol. 12.) iznosi visina Kleka 1182 m., a Klečice ili Maloga Kleka 1062 m.

Digitized by Google

stao Klek poznat u cijeloj Evropi, i mnogi je botaničar došao na taj u floristiškom pogledu glasoviti vrh, da svojima očima gleda bilinu, koja ima tako zanimljivo stanište!

Ljudevit je Rossi službujući u Ogulinu našao jedno novo stanište, kao što nam svjedoči Vukotinovićev herbar. Raste „in pratis subalpinis „Sovinica" (Sovenica) ad Ogulin. 27. svibnja 1880."

Ova nam ceduljica svjedoči, da *P. brachyodonta* cvate već u svibnju, no u najbujnijem je cvijetu u početku lipnja, i zato su Vukotinovićevi pojedinci u plodu.

Za Grčku bilježi nam Halácsy samo jedno stanište (po Heldreichu) „in pratis oropedii Neuropolis in Pindo dolopico". U Grčkoj, koja ima samo dvije vrste toga roda, cvate *P. brachyodonta* mjeseca lipnja.

P. Friderici-Augusti Tommasini u Linnaea XIII. (1839.) vol. 13. p. 69. i 74. tabl. 2. — Fl. Cr. p. 682. — Syn. *P. mucida* Koch Synop. III. 624. — *P. petiolaris* Caruel pr. part. u Parlatore Fl. Ital. (1885.) VI. p. 437.

Po Fl. dalm. (1847.) II. p. 176. na Dinari, Svilaji, Gnjatu i Prologu; u Istri na brijegu Slavniku i Velikoj Učki; u Hercegovini na Gljivi kod Trebinja, a po Nymanu i u Bosni, Srbiji i Albaniji, po Steiningeru u Macedoniji i Crnoj gori.

Tommasini je ovu vrstu posvetio saskomu kralju Fridriku Augustu, koji je god. 1838. kao botaničar prošao Dalmaciju i Crnu goru, a u Hrvatskoj bio na Goloj Plješevici i na Kleku, kamo ga je pratio bivši ogulinski pukovnik, a potonji ban Josip Jelačić.[1]

U Vukotinovićevu herbaru (br. 2473./a.) ima *P. Friderici Augusti* iz ruke Tommasinijeve, a iz g. 1854. i g. 1855. S ceduljice razabiremo, da ju je ovaj poslao i Schultzu za njegov Herbarium normale (br. 334.), po kojem je dospjela lijepa ova bilina u ruke drugim botaničarima.

P. rostrata L. Spec. pl. ed. I. *(1753.)* p. 607.; ed. II. (1762.) pag. 845. — Fl. Cr. p. 683. kao *P. Jacquini* Koch u Röhl Deutschl. Fl. IV. p. 363. (1833.); Synop. ed. III. p. 2056. Prvo ime ima

[1] Taj je put opisao dr. B. Biasoletto u „Relazione del viaggio fatto nella primavera dell' anno 1838. dalla Maestà del re Federico Agosto de Sassonia nell' Istria, Dalmazia e Montenegro". Trieste 1840. Od str. 203.—222. donosi knjiga spisak onih bilina, koje je kralj ubrao na tom svom novom putovanju. Knjiga je ukrašena kraljevom slikom i trima tablicama.

Digitized by Google

„prvenstvo". — Syn. *P. rostrata* Kramer Elench. veget. per Austr. p. 183. br. 3. — Jacq. Enum. Fl. Austr. III. p. 112. tabl. 205.

P. incarnata Baumg. — Za Debelo brdo bilježi ovu vrstu Kitaibel (Kanitz: Reliquiae Kitaibelianae. Verhand. d. zool.-bot. Gesellsch. (1863.) Bnd. XIII. p. 526. [br. 133.]). U Schlossera (herb. br. 1423./b.) iz Bosiljeva i Čabra (brao valjada Klinggräff); u herbaru ovoga (br. 1830.) sa Velikoga Žlijeba kod Radoboja, gdje bi ova „alpinska" vrsta imala rasti po Wormastiniju. („An feuchten Stellen der höheren Alpen"; Koch Synop. III. p. 2057.) U Vukotinovićevu, kao i generalnom herbaru, nema je iz Hrvatske.

P. palustris L. Spec. pl. ed. I. p. 607. (1753.); Fl. Cr. p. 683. — Syn. *P. insubrica* Rota Prosp. Fl. Berg. p. 68. i 102. (1853.). Steininger l. c. Bd. XXIX. p. 217. Kerner Fl. exsicc. Austro-hung. br. 2113. — U Vukotinovićevu herbaru nema ove vrste iz Hrvatske; u Schlosserovu (br. 1475.) čuva se iz Zagorja gornjega (Kaniža, Stubica).

P. acaulis Scopoli Fl. Carniolica ed. II. tom. I. p. 439. tabl. 31. (1772.); Kerner Fl. exsicc. Austro-hung. br. 916.; Koch Synop. III. p. 2062. Fl. Cr. p. 683. ima kao auktora „Wulfena", kojega navodi i Steininger po Jacq. Coll. I. p. 207. br. 69. — U nas po Klinggräffu oko Delnica, Lokava, Mrzle vodice i Čabra, ali ga „nema" u njegovu herbaru, a ni u Schlossera i Vukotinovića. Novo je stanište dolina Rječine, gdje raste na travnatim mjestima sa *Hacquetia Epipactis;* ima ga i u susjednoj Istri u jednoj ponikvi nedaleko Bermana, u šumi kod Kastva i na Veloj Učki (Anna Maria Smith Fl. v. Fiume, p. 39.) S ovoga brijega i u Vukotinovićevu herbaru (15. svibnja 1856. br. 2474.). U generalnom herbaru od Dollinera i Tommasinija. U okolini Ljubljane ima više staništa, pa ga je tamo 13. svibnja 1838. brao i saski kralj Fridrik August, kad bijaše za Kranjsku „endemička" bilina, no danas je poznata pače i iz Judikarije.

P. foliosa L. imala bi po Fl. Cr. p. 684. rasti u Dalmaciji „in locis glareosis subalpinis Dalmatiae", koja joj dodaje kao sinonim *P. comosa* Scop. Visiani Fl. dalm. tom. II. p. 176. bilježi za Prolog i Biokovo *P. comosa*, ali onu vrstu, koju je pod tim imenom opisao „Linné". Po Nymanu (l. c. 554.) raste *P. foliosa* L. na centralnim Alpama, na Juri, Vogezima i Pirenejama. Po Steiningeru l. c. p. 376. u sjevernim pokrajinama Španije, na Alpama

Digitized by Google

Francuske, Švicarske, u gornjoj Italiji, u austrijskim zemljama, na Cantalu i Mont Doreu.

U Schlosserovu herbaru (br 1424. b.) ima *P. foliosa* L. „in locis glareosis subalpinis Croatiae australis ad Delnice, Lokve et alibi", koji je ubran svakako poslije g. 1869., jer ga „nema" u Fl. Cr. iz Hrvatske, a nema ga ni u „Bilinaru".

Po opisu i eksikatima „nije" ovo *P. foliosa* L., već je **P. Summana** Sprengel Plant. nov. fasc. sec. *(1815.)* p. 70. br. 134. — Syn. *P. Hacquetii* Graf u „Flora" (1834.) p. 40.—42. — *P. foliosa* Benth. — *P. Tommasini* A. Kern. in litt. ad Tomm. — *P. exaltata* var. *carpathica* Porcius u „Transsilvania" 1886. — *P. exaltata* Wagner (non Besser) in sched. — Fl. Cr. kao *P. Hacquetii* p. 684. (Snježnik u Gorskom kotaru, sabrano od dra. Klinggräffa).

P. foliosa L. u generalnom herbaru iz ruke Steiningerove („In monte Bodenwies 1540 m. In confinibus Austriae superioris".) „Die Exemplare, welche ich unter dem Namen *P. foliosa* L. von dem Central-Apennin in den verschiedenen Herbarien aufliegen fand, waren sämmtlich *P. Summana* Spr. *P. foliosa* L. unterscheidet sich constant von der *P. Summana* Spr. durch den fünfzähnigen Kelch und die innen kahle Blumenkronröhre". (Steininger.)

Ova vrsta raste i na Visočici i Sv. Brdu na Velebitu (Herb. Schlosser br. 1425./b.), u Gorskom kotaru na Risnjaku kao var. *axilliflora* Borbás u „Méhány új novényalak, Akad. Értesitő" 1882. p. 9.—10.; Oesterr. bot. Ztschr. 1882. p. 170.; u orijaškim pojedincima pod vrhom Medveđakom kod Liča, gdje sam tu bilinu našao 9. srpnja g. 1881., kad sam tamo bio sa dr. Schlosserom i Vukotinovićem na botaničkoj ekskurziji. U Vukotinovićevu herbaru (br. 2471. a.) sa Vele Učke i Slavnika (Tommasini); tu i sa brijega Javornika kod Postojne, orginalnoga staništa Hacquetova. Steininger je imao u ruci pojedinaca, koje je T. Pichler brao kod Rijeke („Karstgebirge bei Fiume".) U Istri i na brijegu Brložniku (A. M. Smith), inače u Srbiji, Bosni, Ugarskoj, Galiciji, Kranjskoj (Črna prst), u gornjoj Italiji, na centralnim Apeninama i valjada na Monte St. Angelo kod Napulja.

P. verticillata L. Spec. pl. ed. I. (1753.) tabl. 608.; Fl. Cr. p. 684. — Syn. *P. Stevenii* Bunge u Ledebour Fl. Altai. II. p. 427. (1829.) — Steininger l. c. p. 248. Kao nova staništa bilježim: Veliki Risnjak, istočni travnati obronci (Borbás; Hirc), brijeg Medvrh i Guslice kod Križulne u kotaru čabarskom (Hirc), a

Digitized by Google

brao sam je i na Velikoj Visočici, otkuda je ima i dr. Schlosser (herb. br. 1421.), dok ju je Vukotinović brao na Goloj Plješevici već g. 1856. mjeseca lipnja (herb. br. 2437.), a prije njega Kitaibel l. c. br. 132. *P. verticillata* raste i u Istri, Bosni, Srbiji; u Crnoj gori na Komu, Sinjajevini planini i Malom Durmitoru.

P. rosea Wulf. u Jacq. Miscell. vol. II. p. 57. (1781.) — Syn. *P. hirsuta* Vill. Hist. pl. Dauph. II. p. 423 (1787.); non L.; Steininger l. c. Bd. XXX. p. 57. „nije" vidio eksemplara iz Hrvatske. U Fl. Cr. p. 684. čitamo: „In pascuis saxosis alpis Plieševica ad Korenicam". U Schlosserovu herbaru (br. 1424.) čuvaju se tri pojedinca sa toga vrha, a raste inače u Dauphiné-u, Piemontu, Tirolu, Koruškoj, Kranjskoj, gornjoj i donjoj Austriji, donjoj Štajerskoj, na Karpatima.

Verbascum L.

Spec. pl. ed. I. (1753.) p. 177.; L. Gen. n. 245.

V. phoeniceum L. Spec. pl. ed. I. p. 178. — Syn. *V. ferrugineum* Andr. bot. rep. tabl. 162.; Pieri Cors. Fl. p. 32. — *V. triste* S. et S. Prodr. I. p. 151. — Icon. Jacq. Fl. Austr. tabl. 125. U Slavoniji i oko Osijeka, na glasijama između donjega grada i tvrđave; u dolini Veličanke kod Velike (Hirc.). U generalnom herbaru iz Spljeta (Pfister.) Na otoku Rabu (Seenus), Lošinju (Josch), na otoku Krku oko grada Krka, oko Baške, Sv. Jelene (Tommasini) u „Notizie naturale e storiche sull' isola Veglia" od Cubicha (Trst, 1874. p. 51. dodatka).[1]

V. Blattaria L. Sp. pl. ed. I. p. 178.; S. et S. Prodr. I. p. 151.; Pieri Fl. Cors. p. 31.; Boiss. Fl. Orien. IV. p. 308.; Koch Synop. III. p. 2020. U flori Hrvatske i Slavonije obična vrsta. Ima od njega više križanaca, od kojih će se gdjekoji i u nas još naći, n. pr. *V. thapsiforme* × *Blattaria* = **V. grandiflorum** Schrad. (1809.) — *V. phlomoides* × *Blattaria* = **V. phlagriforme** Pfund u „Monographiae generis Verbasci prodromus". Prag (1840.) p. 49. V. Blattaria var. *repandum* W. na otoku Krku kod Omišlja uz obale tamošnjega jezera (Hirc) i oko Voza (Borbás).

V. Thapsus L. Spec. pl. ed. I. p. 177. — Syn. *V. Schraderi* Meyer Chloris Hannov. p. 326. (1836.) — U Gorskom kotaru na Pećima kod Zlobina (Hirc).

[1] I ostala staništa citovana za otok Krk od Tommasinija potječu iz ovoga djela.

Digitized by Google

V. thapsiforme Schrad. — Syn. *V. Thapsus* Dalap. Prosp. p. 23., non L. — Halácsy l. c. p. 375. navodi ovu bilinu kao „formu“ od *V. densiflorum* Bertl., a Fl. Cr. p. 647. kao sinonim od „V. thapsiforme“. — Iz ovoga roda u našoj flori najuglednija vrsta, koja bude po zidovima i do 2 m. visoka, pa se katkada razraste u prilici kandelabra.

V. macrurum Ten. Fl. Neapol. pr. app. V. p. 9.; Fl. Nap. III. p. 216. tabl. 214.; Nyman l. c. p. 527. — Fl. Cr. p. 648. kao V. macrourum Ten. — Syn. *V. Schraderi* Raul. Cret. p. 819. non Mey. — *V. thapsiforme* Boiss. Fl. Or. IV. p. 301. — U gener. herbaru samo iz Calabrije.

V. phlomoides L. Spec. pl. ed. I. p. 1194. — Syn. *V. australe* Schrad. u Comm. Goett. II. p. 24. tabl. 2. — *V. rugulosum* Willd. Enum. hort. Berol. p. 224. (1809.) Fl. Cr. p. 648. — I oko Ogulina (Hirc).

V. floccosum W. K. l. c. vol. I. (1802.) tom. 3. p. 81.—82., tabl. 79. — Fl. Cr. p. 650., no „prvenstvo“ zapada imenu „**V. pulverulentum**“, pod kojim ga je imenom opisao Villars u Fl. Dauph. II. p. 490. već g. *1787.* — Vide: Pieri Cors. Fl. p. 32.; Halácsy l. c. p. 387.; Boiss. Fl. Orient. IV. p. 322.; Hauskn. Symb. p. 161.; Nyman l. c. p. 529. — *V. pulverulentum* (Vukot. herb. br. 2600.) iz Like jest „*V. Lychnitis*“. — U zagrebačkoj okolici u Podsusjedu (Vukotinović), oko Samobora (Hirc).

V. orientale M. B. Fl. Taur. — Cauc. I. p. 160., III. p. 154.; Fl. Cr. p. 651. — Syn. *V. Austriacum* Schott. u Roem. i Schult. Syst. veget. (1819.) p. 341. — *V. virens* Host Fl. Austr. I. p. 290.; Nyman l. c. p. 531. — Fl. Cr. opisuje *V. Austriacum* kao „odliku“ od *V. orientale.* — U Gorskom kotaru oko izvora Čabranke i na Velikom Tuhobiću kod Fužine (Hirc). Oko Zagreba, Križevaca (Vukot. herb. br. 2592.), Varaždinskih Toplica (Schlosser, herb. br. 1493.). I na otoku Krku (Tomm.).

V. lanatum Schrader l. c. II. 28. (1823.); Kerner Fl. exsicc. Austro-hung. br. 1744. — U Zagrebačkoj gori uz putove n. pr. uz put, što vodi od kapelice sv. Roka prama Kraljičinu zdencu (Heinz) i po šumskim čistinama; na Sljemenu (Hirc). U Klinggräffovu herb. pod br. 1751. U hrvatskom primorju na Vel. Tuhobiću (Vukot. herb. br. 2593.), na sklopu obručkom oko Vršine i Zgorničke na krševitu tlu među grmljem; oko Lepoglave po šumskim čistinama (Hirc), na Kleku (Borbás). — Fl. Cr. ima *V. thyrsoideum* Host kao sinonim od „V. lanatum“ Schrad., no

Digitized by Google

Halácsy l. c. p. 392. opisuje ga kao vrstu dodajući mu ove sinonime: *V. nigrum* Mazz. u Ant. Jonn. V. p. 212. — *V. Chaixii* Hal. Beitr. zur Fl. v. Epir. p. 33. non Vill.

V. Chaixii Vill. Fl. Dauph. II. (1787.) p. 491. tabl. 13. U flori hrvatskoga mediterana. Na kamenim mjestima, kraj putova, po livadama oko Bakra, Kraljevice, Sv. Jakova (Hirc). I oko Baga (Borbás).

V. nigrum L. Spec. pl. ed. I. p. 253.; Jacq. Enum. p. 34.; M. i K. Deutschl. Fl. ed. II. p. 219.; Kerner Fl. exsicc. Austro-hung. br. 1743. — U Gorskom kotaru oko Tihova i Broda, u Zagorju oko Radoboja (Sv. Jakov), Lepoglave; u Slavoniji kod Josipovca, Čepina po vlažnim livadama, na Velikom Papuku (Hirc).

Križanci ili bastardi su u rodu *Verbascum* obični, ali u nas do sada slabo proučeni. Već nam Kitaibel opisuje **V. Slavonicum** u Roch. Ban. p. 26. i Add. p. 137. iz okoline Vočina, za koji misli Neilreich, da je križanac od *V. Thapsus* × *V. phlomoides* ili *V. phlomoides* × *semidecurrens* (Die bisher bekannten Pflanzen Slavoniens, p. 124. br. 1719.)

V. Fluminense Kerner križanac je od *V. Chaixii* × *V. floccosum*. U Vukotinovićevu herb. iz Raduča i Sv. Roka u Lici; ima ga i oko Novoga i na Vratniku (Borbás). U generalnom herbaru ima **V. Vukotinovići** Borbás kao križanac od *V. Chaixii* × *V. Blattaria*, koji je dr. Borbás našao u Lici uz cestu, što vodi u Medak (16. kolovoza 1875.). — **V. Murbeckii** Borb. *(V. floccosum* × *phlomoides)*. Osik (Borb.)[1]

Scrophularia L.

Spec. pl. ed. I. (1753.) p. 619.; Koch Synop. ed. III. p. 2021. — Wydler: Essai monographique sur le genre *Scrophularia*. Genève 1828.

Sc. vernalis L. Spec. pl. ed. I. p. 620.; W. et K. l. c. vol. I. p. 75.—76. tabl. 73. — U Zagrebačkoj gori pred spiljom Šupljasta pećina, oko Stenjevca gornjega, u Samoborskoj gori na šumskim čistinama pod Zelen-gradom, oko Lepoglave, Klenovnika, Višnjice, u šumama Ivančice, na Kozjanu (Hirc).

[1] Poznatih bastarda ima do 150 (Isp. Focke: Pflanzenmischlinge p. 295. i Schiffner u Bibl. bot. III.).

Digitized by Google

Sc. peregrina L. Spec. pl. ed. I. p. 620. — U Dalmaciji i oko Gruža, na školju Lopudu (Vodopić), na otoku Hvaru i Lastovu (dr. Jiruš). U hrv. primorju u dolini Rječine kod Jelenja (A. M. Smith Fl. v. Fiume, p. 38.). Na otoku Krku po obrađenom tlu (Tomm.), na Lošinju oko Nerezina (Josch). U Dalmaciji i oko Budve, Kotora, Novoga Kaštela, Župe, u Krivošijama (Crkvice) (Brančik l. c.).

Sc. laciniata W. et K. l. c. vol. II. p. 185.–186. tabl. 170. „Habitat in rupibus calcareis alpinis et subalpinis Croatiae, tam in Velebich quam in Plissivicza, hic etiam in petras vallis Villena draga descendens". — Kerner Flora exsicc. Austro-hung. br. 161. Dalmatia. In fundis et valleculis umbrosis montis Biokovo (Pichler).

Kerner dodaje: „Die Laubbläter der hier ausgegebenen der Buchenregion des Biokovo entstammenden Exemplare sind an der Basis nur gelappt, die Lappen sowie auch die Zähne der Lappen breit eiförmig gerundet mit ausgesetzten stumpfen Spitzchen. Auch an allen anderen in den höheren Gebirgslagen des südl. Dalmatien gesammelten Exemplaren finde ich die Blätter mit diesem Zuschnitte; die Laubblätter der im niederen Berglande vorkommenden Exemplare sind dagegen an der Basis tief zerspalten und die Abschnitte sowie die Zähne des Randes spitz. Die Abbildung in W. et K. hält in Beziehung des Zuschnittes der Blätter die Mitte zwischen der im höheren Berglande des südlichen Dalmatien und der im niederen Hügellande beispielweise am Mte. Tersato bei Fiume vorkommenden Form".

Schlosser i Vukotinović ubrali su ovu po našu alpinsku floru veoma značajnu bilinu prvi put u hrv. primorju g. 1852. Uz Lujzinsku cestu između Sušaka i Orehovice (A. M. Smith), oko Grohova (Rossi), na Trsatu (sa neobično velikim lišćem i dugom srednjom krpom; A. M. Smith). U hrv. primorju oko Grohova, na Platku, na Pećima kod Zlobina, oko Zgorničke, na planinama više Drivenika, na Obruču, Grlešu (Hirc); u Gorskom kotaru na Medvrhu, Jelencu, Guslicama, Snježniku, Risnjaku, Burnom Bitoraju, Javorju, Tičjaku, Medvedaku; na Bjelolasici, Kleku, Bijelim stijenama, Visočici, Sadikovcu (Hirc). Na otoku Krku na vrhu Organu i Treskavcu, oko Baške stare, na ostrvu Prviću (Tomm.). Po Kitaibelu i u Forkašić-drazi, na Goloj Plješevici, Samaru, Badnju, Debelom brdu (Neilreich l. c. p. 132.), na Rajincu (Borbás).

Digitized by Google

Sinonimi: *Sc. multifida* Willd. Hort. Berol. tabl. 58. — *Sc. laciniata* var. *multifida* Boiss. Fl. Orient. IV. p. 409. — *Sc. heterophylla* Orph. non „Willd." Fl. Graec. (Olymp.) exsicc. br. 729. po Nymanu l. c. p. 534. br. 35. — var. *Pantocsekii* Gris. Oko Senja (Borbás).

Sc. Scopolii Hoppe u Pers. Synop. II. p. 190.; Boiss. Fl. Orient. IV. p. 395. — Syn. *Sc. auriculata* Scop. Fl. Carin. ed. II. p. 446. tabl. 32. — *Sc. glandulosa* W. et K. l. c. III. p. 238.—239. tabl. 214.; Fl. Cr. p. 654. — *Sc. Scorodonia* Host non L.[1] — *Sc. melissifolia* Griseb. Spic. (Syll. p. 117.) non „d' Urvil".

Sc. grandidentata Ten. „nije" sinonim (Fl. Cr.) od *Sc. Scopolii*, već je po Halácsyju l. c. p. 400 „odlika" od ove („Foliorum saepe acutiorum et magis oblongorum dentes majores, saepe denticulis 1—2 aucti".); *Sc. betonicaefolia* Viv. (ne „Wydl" Fl. Cr.) sinonim je od *Sc. oblongifolia* Lois., a *Sc. betonicaefolia* „L." od *Sc. Scorodonia* L. — U Slavoniji ubrao sam *Sc. Scopolii* na Velikom Papuku. U Vukotinovićevu herbaru (br. 2558.) opisana je *Scrophularia tetragona* Schloss. et Vuk. ubrana kod Zagreba 24. rujna g. 1870., koju je poslije Vukotinović ispravio u *Sc. glandulosa* W. et K., dok je na drugoj ceduljici napisao: „*Scrophularia Scopolii* Hoppe vel *Sc. tetragona*" (Križevci, Varaždin. Toplice, 1851.).

Sc. alata Gilib. Fl. Lithuan. II. (1782.) p. 127. — Syn. *Sc. umbrosa* Dumortier, Prodr. Fl. Belg. (1827.) p. 37. — *Sc. Ehrhardtii* Stevens u Ann. Nat. Hist. ser. I. V. (1840.) p. 3.; Koch, Synop. III. p. 2021. — Fl. Cr. p. 654. ima *Sc. aquatica* „Koch", no auktor je Linné Sp. pl. ed. I. (1753.) p. 620., a *Sc. Ehrhardtii* njezin je sinonim, dok se *Sc. alata* ne spominje. Engler i Prantl l. c. p. 65. pišu: „*Sc. alata* L. gliedert sich in Europa in 1. *S. aquatica* L., 2. *S. alata* Gilib. und 3. *S. Neesii* Wirtg." U okolini zagrebačkoj *Sc. alata* Gilib. Oko Kraljičina zdenca (Hirc), uz potok Gračanicu u Gračanima (Heinz).

Sc. Hoppei Koch u Röhl. Deutsch. Fl. ed. III. vol. IV. (1833.), p. 410. (ne „Hoppii" Fl. Cr. p. 655.); Engler i Prantl l. c. p. 65. — Syn. *Sc. canina* Hoppe; *Sc. chrysanthemifolia* Rchb.; *Sc. juratensis* Schleich. (po Nymanu l. c. p. 534.).

---

[1] *Sc. Scorodonia* L. po Kitaibelu oko Osijeka (Neilr. l. c. p. 126.) U gener. herbaru iz Bresta (Finistère) u Francuskoj. Po Nymanu p. 533. u Lusit., Hisp., Hibern., Angl. mer.-occ., Gall. occ.

Digitized by Google

Po Fl. Cr., koja nam je bilježi po Klinggräffu, imala bi ova vrsta rasti na krševitom tlu oko Čabra i na Velikom Snježniku. U Klinggräffovu herbaru (br. 1760.) leže dva krživa i nepotpuna eksemplara, a na ceduljici čitamo: „*Scrophularia Hoppii* Koch. Kod Rijeke. Vukot. et Schloss. 1852.“. Ovi pojedinci pripadaju vrsti „Sc. **canina** L.“, koja je u našem primorju obična. Tek pribrana građa ima odlučiti, da li ona alpinska vrsta (ili forma) u istinu u nas raste; ja je u 10 godina nijesam našao u Gorskom kotaru. Ovamo ide i bilina iz Vukotinovićeva herbara (br. 2560./a. „U primorju hrv.“ 1852.)

Poredbena građa. I. Tirolia australi-orientalis. Pustaria. In locis glareosis ad lacum „Toblacher See“ et in Carinthia in glareosis montis „Wischberg“ prope Raibl; solo calcareo; 1500—1700 m. (Huter.) II. Carinthia. In glareosis calcareis vallis Canalensis circa Uggowitz; 700.—800 m. (Jabornegg) (Kerner u Fl. exsicc. Austro-hung. br. 2127.) — Tirol.-Venezianishe Grenz-Alpen von Schlunderbach. Im Felsenschutt der Fladinger Dolomite 1700 m. (J. Freyn). — Brixen. Flussufer (Huter.) — Ampezzothal auf Dolomitgeröll (R. Benz u „Baenitz Herb. Europ.“) — Gallia. Près Grenoble (Pommaret u Schultz Herb. norm. Cent. 12. br. 1178. kao *Sc. juratensis* Schl.)

Sc. canina L. Spec. pl. ed. I. p. 621. — Syn. *Sc. bicolor* S. et S. Prodr. I. p. 437., Fl. Graec. VI. p. 1. tabl. 602. — *Sc. chrysanthemifolia* Willd. Enum. hort. Berol. tabl. 59. — *Sc. ramosissima* d' Urv. Enum. p. 75. — *Sc. pyramidalis* Wydl. Monogr. Scroph. p. 45. = *Sc. scoparia* Marg. — *S. pindicola* Haussk. Symb. p. 172. — U okolici zagrebačkoj n. pr. na pruđu oko Save (Jiruš g. 1878.), Podsusjed, Sv. Šimun (Hirc.)

Sc. nodosa L. U hrvatskom primorju u šumama u dolini Rječine iza Žaklja. U Slavoniji uz Kutjevačku Rijeku kod Kutjeva (Hirc).

Linaria Juss.

Gen. (1789.) p. 120. — *Antirrhini* L. Spec. pl. ed. I. (1753.) p. 612.

L. Cymbalaria Miller Gard. dict. ed. VIII. (1768.) n. 17. — Syn. *Antirrhinum Cymbalaria* L. Spec. pl. ed. I. p. 612. — *Elatine Cymbalaria* Moench Meth. (1794.) p. 525. — *Cymbalaria muralis* Fl. Wett. II. (1800.) p. 397. — U hrvatskom primorju po zidovima frankopanskoga grada u Bakru brojno; na Malom

Digitized by Google

Obruču u raspuklinama vapnenih, osojnih pećina; u Severinu po vlažnim pećinama pod gradom uz Kupu; u drazi Piškli kod Cresa na zidu tamošnjega vrela; na Osoršćici oko „Svete grote“ (spilje); na otočiću Košljunu (Cassione) kod Krka (Hirc), na Kleku (Marchesetti), Snježniku (Borbás), u Dalmaciji na Biokovu (saski kralj Fridrik August l. c. p. 133.).

L. triphylla L. Spec. pl. ed. II. (1762.) p. 852.; — Mill. Gard. dict. n. 2.; Boiss. Fl. Or. IV. p. 380.; Halácsy Consp. Fl. Graec. p. 410. — Fl. Cr. p. 659. „in locis cultis litt. cr. circa Buccari“, gdje je ja nijesam našao.

L. alpina Mil. Gard. dict. n. 5. — Syn. *Antirrhinum alpinum* L. Spec. pl. ed. II. (1762.) p. 856. — Visiani nam rijetku ovu vrstu bilježi samo za Sv. Brdo na Velebitu (Fl. Dalm. vol. II. p. 163.), gdje ju je u novije doba ubrao prof. Langhoffer. Na Velikom Risnjaku u raspuklinama Dvořákove litice, veoma rijetko (3. kolovoza g. 1899. Hirc).

L. Pelisseriana L. Spec. pl. ed. II. p. 615. non „Mill.“ (Fl. Cr. p. 659.); Halácsy Fl. Graec. p. 412. — Syn. *Antirrhinum saphirinum* Sieb. u „Flora“ V. p. 639. — *A. gracile* Pers. Synop. II. p. 156. Na otoku Onije (Unie) kod Lošinja (saski kralj Fridrik August l. c. p. 30).

L. parviflora Jacq. Icon. rar. III. tabl. 499., Collect. IV. p. 204. (kao *Antirrhinum.)* — Syn. *L. simplex* Willd. Sp. III. p. 243. — *L. simplex* DC. Fl. Fr. III. p. 588. — *L. arvensis* β. *parviflora* Boiss. Fl. Or. IV. p. 375. U Dalmaciji i na Monte Marianu kod Spljeta sa strane južne (1. travnja 1877. Jiruš u gener. herb.).

L. Chalepensis Mill. Gard. dict. n. 12. — Syn. *A. Chalepense* L. Spec. pl. ed. II. p. 852. — Na otoku Krku oko Omišlja. U Dalmaciji i na Monte Marianu i oko Jezera na otoku Mljetu (Jiruš.).

L. repens Mill. — Fl. Cr. p. 660. 661. „In saxosis montanis circa Trau, Spalato, Clissa, Almissa et Macarsca“, nije Millerova bilina toga imena, već je **nova** vrsta opisana od Kernera kao „**L. microsepala**“ u Fl. exsicc. Austro-hung. br. 158.

L. angustifolia. Fl. Cr. p. 661. navodi kao auktora „DC.“, no pod ovim ju je imenom opisao Reichenbach u Fl. Germ. excurs. (1830.—1832.) p. 375. Prvenstvo ima ime „L. italica“ Trev., koji je opisuje u Act. acad. Nat. Cur. XIII. p. 188. g. 1826.

L. genistifolia Mill. Gard. dict. n. 14. — Syn. *Antirrhinum genistifolium* L. Spec. pl. ed. I. p. 616. — *L. dolopica* Formanek u Verh. Brünn. 1897. p. 47. Značajna bilina za floru sla-

Digitized by Google

vonsku. Staništima u Fl. Cr. p. 662. dodajem Breznicu kod Našica (Hirc) i Kamenicu u Srijemu (Heinz).

L. dalmatica Mill. Gard. dict. n. 13.; Raul Cret. p. 821.; Boiss. Fl. Or. IV. p. 376. — Syn. *L. Smithii* Boiss. et Orph. u Orph. Fl. Gr. n. 711.; Rchb. Icon. t. 65. — U generalnom herbaru iz Dubrovnika, gdje cvate mjeseca rujna (Jiruš). Saski kralj Fridrik August brao ju je oko Kotora (l. c. p. 71.).

Chaenorrhinum DC.

Fl. Fr. V. p. 410.; Engler-Prantl l. c. Thl. IV. Abth. 3b. p. 60.; Halácsy l. c. p. 417.; Fl. Cr. p. 658. kao Linaria.

Ch. minus L. Spec. pl. ed. I. (1753.) p. 617. — Syn. *Linaria minor* Desf. Fl. Atl. II. p. 46.; Boiss. Fl. Or. IV. p. 383.; Hall. u Oesterr. bot. Ztschr. (1892.) p. 375.; Beitr. Fl. Epir. p. 33.; Fl. Cr. p. 658. — U Gorskom kotaru oko Broda među usjevima, oko Tounja po krasama, u Lepoglavi na lapornom tlu kod kapelice sv. Ivana, oko Kalnika (Hirc).

C. litorale Bernh. u DC. Fl. pars V. p. 410. — Syn. *L. litoralis* Willd. Enum. hort. Berol. p. 641.; Fl. Cr. p. 659. I oko Senja (Rossi kao *L. arvensis).* U Dalmaciji na Biokovu (saski kralj Fridrik August l. c. p. 133.).

Elatinoides Wettst.

u Engler i Prantl l. c. Thl. IV. Abth. 3b. p. 58.; Chavan Monogr. d. Antirrh. p. 103.; Lo Jacono Observ. Lin. Europ. (1881.) = *Elatine* Moench non L.; Fl. Cr. kao Linaria.

E. spuria Wettst. l. c. — Syn. *Linaria spuria* Mill. Gard. dict. ed. VIII. (1768.) n. 5. — *Antirrhinum spurium* L. Spec. pl. ed. I. (1753.) p. 613. — *Cymbalaria spuria* Fl. Wett. II. (1800.) p. 398. — *Kickxia spuria* Dum. Fl. Belg. (1827.) p. 35. U hrv. primorju i oko Cernika, u Zagorju oko Višnjice, Klenovnika, Lepoglave, oko Siska (Hirc). Fl. Cr. p. 657. kao *Linaria spuria* Mill.

E. cirrhosa Wettst. l. c. — Syn. *L. cirrhosa* L. (non Vis.) Mant. p. 249.

E. commutata Wettst. l. c. — Syn. *L. commutata* Bernh. u Rchb. Icon. p. 6. tabl. 815.; Fl. Cr. p. 658. — Syn. *Antirrhinum graecum* Ch. et B. exp. p. 175. tabl. 21 — *L. graeca* Chav. Monogr. p. 108. — Primorska je bilina toga imena *E. lasiopodum* Wettst. (Hirc Fl. okolice bakarske p. 97. br. 608.)

Digitized by Google

E. Elatine Wettst. l. c. — Syn. *L. Elatine* Miller Gard. dict. n. 16. — *Antirrhinum Elatine* L. Spec. pl. ed. I. (1753.) p. 612. — *Elatine hastata* Moench Meth. (1794.) p. 524. — *Cymbalaria Elatine* Fl. Wett. II. (1800.) p. 398. — *Kickxia Elatine* Dum. Fl. Belg. (1827.) p. 35. — Na pustim mjestima oko Siska i Čepina (Hirc). — *E. commutata* Wettst. u generalnom herbaru iz: „Balearum insula Minori, in agris restilib. et sylvis praedii bar. de Serall. pl. calc. 3. Julio 1885. (Porta et Rigo.)

Antirrhinum L.

Spec. pl. ed. I. (1753.) p. 617. — *Simbuleta* Forsk. Fl. Aegypt. Arab. (1775.) p. 115. — *Anarrhinum* Desft. Fl. Atl. II. (1800.) pag. 51.

A. latifolium DC. Po Fl. Cr. p. 663. imala bi ova zijevalica rasti oko Rijeke, Kraljevice, Senja i Baga, te je pod ovim imenom pohranjena u Schlosserovu (br. 1470.) i Vukotinovićevu herbaru (br. 2555.). Rossijeva je bilina iz Senja *A. majus* L., koje ima po zidovima i oko Bakra.

A. latifolium DC. čuva se u generalnom herbaru iz Francuske (E. Reverchon; Alpes-Maritimes; Fontan) i iz Nizze (Rochers des collines, endroits escarpés autour de Nice (Alpes-Maritimes, France. Rec. S. Choulette), koja sa hrvatskom bilinom „nije" istovetna. Po Nymanu raste *A. latifolium* DC. u Hisp. centr., Catal., Gallopr., Delph., Pedem., Ligur., Italia med. (Conspectus p. 537. br. 7.), ali je ne navodi za Hrvatsku, a po Visianiju nema je ni u Dalmaciji, gdje je običan *A. majus* L. („Ad muros in tota Dalmatia frequens. Fl. Dalm. II. p. 166.).

Digitalis L. Gen. pl. n. 758.

D. lanata Ehrh. Beitr. VII. (1792.) p. 153.; W. et K. Descr. et Icon. Pl. rar. hung. I. (1802.) p. 76. tabl. 74. U Srijemu oko Kamenice (Borbás).

D. laevigata W. et K. l. c. II. p. 171. tabl. 158. — Značajna vrsta pustikare za floru hrv. primorja, koja seže i u hrv. Zagorje, jer je ima na vapnovitom tlu oko Radoboja i Jesenja (Hirc).

D. ferruginea L. Spec. pl. ed. I. (1753.) p. 622. Kao nova staništa navodim: Velika Kapela oko Modruša (Borbás) poviše Jezerana kod tamošnje porušene pošte (?), na vrhu Krčmaru kod Smiljana; u Slavoniji oko Našica, brojno između ovoga mjesta i

Digitized by Google

Vukojevaca, desno od druma (Hirc); na Dilj-gori (Martinović J. exs.).

Bilješka. Čuveni geograf i etnograf Baltazar Hacquet napisao je g. 1785. djelo „Physikalisch-Politische Reise aus den Dinarischen durch die Julischen, Carnischen, Rhätischen und Norischen Alpen in Jahre 181—1783. unternommen von Hacquet", u kojem opisuje i svoj put po Hrvatskoj. Na onom sredogorju, koje dijeli Liku od otočkih krajeva, pala mu je u oči osobita pustikara Digitalis Linnei, koja bude i do 6 stopa visoka. Lapovi su lancetni, cvijet je „eingeschnitten und braunroth bemakelt, der Stengel rund und die Blätter glänzend, 6—8″ lang, die ganze Pflanze hatte weder üblen Geruch noch Geschmack. Da sie mit keiner der schon beschriebenen Pflanzen dieses Geschlechtes bei Ritter Linné übereinkommt, so glaube ich sie für eine neue Art halten zu können" (l. c. p. 28.). Hacquet misli svakako Janjču planinu, gdje ima od jedne pustikare u istinu orijaških pojedinaca, u kojima sam prepoznao *D. ferruginea*, koje ima po Schlosseru (herb. br. 1480.) i oko Žutih lokava i Otočca.

Godine 1812. opisali su Waldstein i Kitaibel jedan Digitalis kao **D. fuscescens** l. c. III. p. 304. tabl. 274. („Habitat in montosa parte Croatiae inter frutices".) Po Fl. Cr. p. 666. imala bi ova bilina rasti oko Otočca, Prozora, Janjča i Lešća. U Vukotinovićevu je herbaru nema; u Schlosserovu (br. 1483.) „inter frutices" kod Pleternice i Ruševa. Po Schulzeru, Kanitzu i Knappu „ne raste" ona u Slavoniji, a za požeške krajeve bilježe oni *D. ferruginea*. U generalnom herbaru također nema *D. fuscescens*. Po tome nemamo poredbene građe, ali smijemo reći, da Schlosserovi pojedinci „nijesu" suglasni sa Waldstein-Kitaibelovom slikom i opisom!

Po Nymanu (l. c. p. 535.) mogao bi biti *D. fuscescens* križanac od *D. ambigua* × *D. lanata*. Ako je tako, onda Schlosserova bilina „nije" *D. fuscescens*, jer na navedenim staništima raste *D. ambigua*, ali nema *D. lanata*, koja je u našoj flori isključljivo bilina „slavonska" (V. i Nymana).

D. ambigua Murray, Prodr. Stirp. Goett. *(1770.)* p. 62. — Syn. *D. ochroleuca* Jacq. Fl. Austr. I. (1773.) p. 36. — *D. grandiflora* Lam. Fl. Franc. II. (1778.) p. 332. — Fl. Cr. p. 666.; Visiani Fl. Dalm. II. p. 166. — I na Dilj-gori (Martinović J. exs.), Kleku (Kugy), pod M. Risnjakom, na Skradskom vrhu, na pećinama oko Maloga jezera kod Plaškoga, tu i oko Grbine pećine (Hirc). U Slavoniji mnogobrojno na Djedinu nosu na Krndiji, gdje je zovu „žabica" (Hirc).

D. purpurea L. Spec. pl. ed. I. (1753.) p. 621. Po Fl. Cr. p. 665. „colitur ubique in hortis et hinc inde profuga et in ruderatis

Digitized by Google

quasi spontanea". Schlosser (herb. br. 1486.): „In sylvis montanis tractus Velebit veluti in monte Vratnik". — „Bilinar" p. 303. „Sadi se u vrtovih". Prije više godina našao je Vukotinović *D. purpurea* oko Topuskoga, gdje je kao krasnica pobjegla iz tamošnjih cvjetnjaka.

Bilješka. Godine 1805. došao je na naše Kvarnerske otoke iz Cjelovca barun Josip Seenus, da tamo sabire bilje. Kod grada Krka našao je jedan nepoznati *Digitalis*, koji je ozvao *D. integriflora*. (Beschreibung einer Reise nach Istrien und Dalmatien vorzüglich in botanischer Hinsicht von dem .... Mit einer Vorrede begleitet von Herrn Doctor und Professor Hoppe in Regensburg[1]).

Tommasini ne spominje za otok Krk nijedan *Digitalis*. Godine 1903. 12. rujna našao sam nedaleko grada Krka u jednom umejku *Digitalis laevigata*, kojemu pristaje Seenusov opis, a kad je tako, to je njegov *D. integriflora* = *D. laevigata* W. et K.

Barun Seenus opisujući nove biline sa svoga puta, služio se u ono doba samo djelima Linnéa i Scheuchzera, jer bijaše botanička literatura oskudna, a floristička djela rijetka.

Veronica (Tourn.).

L. Spec. pl. ed. I. (1753.) p. 9. — *Paederota* L. Spec. pl. ed. II. (1762.) p. 20.

V. Buxbaumii Tenore, Fl. Nap. I. (1811.) p. 7.; Fl. Cr. p. 667. — Syn. *V. persica* Poir Enc. VIII. (1808.) p. 542. — *V. Tournefortii* Gmel. Fl. Bad. *(1805.)* p. 39. Ovo ime ima „prvenstvo". I oko Fužine, Križevaca, Koprivnice, Oštarija na Velebitu (Borbás.)

V. Cymbalaria. Auktor ima se pisati Bodard, ne „Rodard" (Fl. Cr. p. 668.)

V. verna L. — Fl. Cr. p. 669. navodi kao sinonim *V. succulenta* All. i *V. Dillenii* Crantz, no ovo je „odlika" od *V. verna* („Stärker drüsig; Griffel die Ausrandung der Kapsel weit überragend"; Koch Synop. III. p. 2049.). — Syn. *V. verna* f. *longistyla* Ces. Fl. Ital. (1874.) p. 352. — *V. campestris* Schmalhausen, Deutsch. Bot. Gesellsch. X. (1892.) p. 291. — *V. romana* All. Fl. Cr. p. 669. „nije" sinonim od *V. triphylla* L., već od „V. verna" (Nyman l. c. p. 547., br. 44.), dok je *V. romana* L.

[1] Ova za hrvatskoga botaničara „dragocjena" knjižica ostala je dru. Schlosseru i Vukotinoviću, ali i nekim drugim botaničarima nepoznata, premda ima u njoj od Seenusa opisanih „novih" bilina. Štampana je u Nürnbergu i Altdorfu kao „Eine Beilage zum botanischen Taschenbuch auf das Jahr 1805." 8⁰. p. 1—77.

Digitized by Google

sinonim od *V. Sartoriana* Boiss. Što je *V. romana* „Scop.“, koju ima Fl. Cr. kao sinonim od *V. praecox*, „nije“ mi poznato.

V. ciliata Schloss. et Vukot. u Syll. Fl. Cr. p. 90.; Fl. Cr. p. 670., koju su auktori sabirali oko Križevaca, Ravena i Lovrečine. (Schloss. herb. br. 1444.) Nyman (l. c. p. 548.) istovetuje ovu čestoslavicu sa *V. acinifolia* L., kojoj pripada kao sinonim i *V. hirsuta* Vukot. — „*V. ciliata* Schloss. et Vukotinović ..... ist nach Exemplaren aus Schlosser's Hand im Herbarium Rauscher von *V. acinifolia* gar nicht verschieden, denn auch bei dieser kommen Blüthenstiele vor, die 3 mal länger als der Kelch und selbst noch länger sind. *V. hirsuta* Vukotinović bei Kreuz (Schlosser Oesterr. bot. Wochenblatt, IV. p. 116.) ist offenbar mit *V. ciliata* identisch“. (Neilreich Vegetationsverh. von Croatien, p. 136.)

V. satureioides Vis. ne „saturejoides“ (Fl. Cr.) U Dalmaciji na Dinari i Prologu; u Evropi (po Nymanu p. 547.) i u Bosni i Hercegovini.

V. longifolia L. Spec. pl. ed. I. (1753) p. 10. — Nyman (l. c. p. 544.) dodaje toj vrsti ove sinonime: *V. spuria* Cr., Sibth. Sm. (non L.; Schloss. herb. br. 1454./6 kao „vrsta“.) — *V. commutata* Seidl. — *V. Nenningii* Op. — *V. maritima* L. — *V. ticinensis* Pollin. — *V. Hostii* Moret. — *V. arguta* Schrad. — *V. media* Schrad. — *V. elata* Host. — *V. glabra* Schrad. — *V. riparia* Seidl. — *V. villosa* Host. — *V. elatior* Ehrh. — *V. complicata* Hoffm.

Fl. Cr. p. 672. opisuje neke od ovih sinonima kao odlike. Brand, koji je obradio Scrophulariaceae u Kochovoj Synopsis ed. III. p. 2041. piše: „Die Art nach der Gestalt des Blattgrundes in Unterarten zu theilen scheint mir nicht zulässig zu sein. Ich besitze ein Exemplar vom Ochsenwerder bei Frankfurt a. O., an welchem die Blätter theils herrzförmig, theils abgerundet, theils keilig sind“.

U Slavoniji u rítu kod Josipovca (kad presuši) obično mjeseca kolovoza, oko Siska (Hirc, 1876.).

V. spicata L. Spec. pl. ed. I. (1753.) p. 10. ima po Nymanu (l. c. p. 544.) ove sinonime: *V. longifolia* Crantz. — *V. Clusii* Host. — *V. squamosa* Pr. — *V. arguta* Moret. (non Schrad.) — *V. Barrelieri* Sch. — *V. hybrida* L. — *V. australis* Schrad. — Fl. Cr. p. 673. opisuje neke od ovih kao „odlike“, među njima i *V. orchidea* Crantz, koja je po Nymanu vrsta. — Syn. *V. cri-*

Digitized by Google

stata Brnh. — *V. crassifolia* Kit. (Schloss. herb. 1455. „in arvis montanis ad Zagrabiam et alibi“).

V. orchidea Crantz Stirp. Austr. IV. p. 333. — Kerner Fl. exsicc. Austro-hung. br. 156. (Austria inferior. In dumetis ad vinetorum margines circa Perchtoldsdorf prope Vindobonam; l. Woloszczak.)

V. prostrata L. Spec. pl. ed. II. (1762.) p. 17. — Syn. *V. pratensis* Crantz. — *V. Orsiniana* Ten. — *V. pilosa* (L.) Jacq. po Nymanu (l. c. p. 545.) — Što je *V. pectinata* Opiz Fl. Cr. p. 673., koja se tamo opisuje kao „odlika“ od *V. prostrata* L., nije mi poznato. *V. prostrata* L. u Schlosserovu je herbaru pod br. 1450. (Isporedio sa Fl. exsicc. Austro-hung. br. 926. Austria inferior. In collibus apricis aridis ad pedem montis Geissberg prope Perchtoldsdorf; solo calcareo; 300—350 m. Pernhoffer.)

V. multifida L. Spec. pl. ed. I. (1753.) p. 13. — Syn. *V. Austriaca* Sadler, Neilreich, Jacq. et plur. autor.; non Linné. — Conf. A. Kerner u Oesterr. botan. Zeitschr. XXIII. p. 372—373. (1873.); Vegetat. Verh. d. mittl. u. östl. Ungarns p. 359—360. — Fl. Cr. p. 674. kao *V. Austriaca* L. — Conf. Kerner u Fl. exsicc. Austro-hung. br. 925.

V. Austriaca u herbaru Schlosserovu (br. 1451.) jest „V. multifida“ L. U Vukotinovićevu herbaru (br. 2508/b.) pohranjena je *V. multifida* kao V. Austriaca var. *pinnatifida* Koch (Ogulin, Kalnik, Šestine, Medvedgrad), pa je u njegovu herbaru i bilina dra. A. Rehmanna (Exsiccata itineris chersonici) kao *V. multifida* L., a ne „V. Austriaca var. bipinnatifida“, pod kojim je imenom ima i Klinggräff (herb. br. 1808. „Auf trockenen Hügeln bei Agram. Mai.“) Vukotinović brao je *V. Austriaca* L. kod Budima 21. svibnja 1882. (herb. br. 2508/a. kao *V. prostrata* var. *Austriaca*). Staništa, koja ima Fl. Cr. za čestoslavicu ovoga imena, a po gotovu Klek i Mrsinj, ne pripadaju sigurno „sva“ ovoj vrsti. Pod *V. Austriaca* L. ne ide ni bilina iz hrv. primorja, već je „V. multifida“, koje ima i oko Vrbovskoga (Rossi exs. u herb. Borbás). *V. Austriaca* L. ima se „brisati“ iz naše flore. Bilina toga imena iz Osijeka jest *V. multifida* L.

V. Teucrium L. Spec. pl. ed. II. *(1762.)* p. 16. — Syn. *V. latifolia* Jacq. Observ. botan. (1764.) p. 41. — Fl. Cr. p. 675. — — *V. Pseudo-Chamaedrys* Jacq. Fl. Austr. I. p. 38. tabl. 60., koju

Digitized by Google

Fl. Cr. opisuje kao posebnu vrstu, „sinonim“ je od *V. Teucrium*; Halácsy: Consp. fl. Graec. p. 427.

Conf. A. Kerner u Oesterr. botan. Ztschr. XXIII. p. 367—371. (1873.); Vegetat. Verh. d. mittl. u. östl. Ungarn p. 353—357. — Fl. exsicc. Austro-hung. br. 922. — Schlosserova *V. dentata* Schmidt jest „*V. Teucrium* L.“ (herb. br. 1452/b.), a sinonim od *V. Austriaca* L.

Za *V. Teucrium* bilježim ova staništa: Remete, Samoborska Plješivica, Kozjačka draga pod Velikim Oštrcem; na Kalničkoj gori oko Maloga Kalnika; u Zagorju na lapornom tlu oko Pušće donje, Desinića, Radoboja (sv. Jakov), Lobora, Lepoglave (sv. Ivan); oko Janje-gore kod Plaškoga; u Slavoniji na Velikom Papuku i Lončarskom visu kod Kutjeva (Hirc).

V. latifolia L. Spec. pl. ed. I. *(1753.)* p. 13. — Syn. *V. urticifolia* Jacq. Fl. Austr. I. (1773.) p. 37. tabl. 59. — Fl. Cr. p. 677. — Conf. A. Kerner u Oesterr. botan. Ztschr. XXIII. p. 367. (1873.); Vegetat. Verh. d. mittl. u. östl. Ung. p. 353. — Halácsy Consp. Fl. Graec. p. 426. — Značajna čestoslavica za alpinske krajeve domovine.

V. anagalloides Guss. Pl. rar. I. (1827.) p. 5., tabl. 3. kao vrsta. — Halácsy Consp. Fl. Graec. p. 429. — Fl. Cr. p. 676. opisuje je kao odliku od *V. Anagallis* L. bez oznake staništa, no u Schlosserovu herbaru (br. 1448./b) ima nekoliko pojedinaca uz oznaku: „In Eisenbahn-Gräben bei Agram, 1878.“ Kako je nema u Fl. Cr., nađena je poslije g. 1869., kad je ona štampana.

V. montana L. Spec. pl. ed. I. (1753.) p. 3. — U Fl. Cr. p. 677. čitamo: „In nemoribus frondosis umbrosis praesertim submontanis „totius“ Croatiae et Slavoniae“, no uza sve to „nije“ ova čestoslavica u domovini „obična“. Za Zagrebačku goru bilježi je već Klinggräff (herb. br. 1816.); Vukotinović je ime samo Like (brao 1856. bez oznake staništa), Schlosser iz Križevaca (herb. br. 1445.). Po Kitaibelu (Reliquiae Kitaib. br. 129.) na Goloj Plješevici; u Gorskom kotaru u šumskom kraju Zaturine (crnogorica) kod Lokava, u jarku Cukavcu kod Gotalovca (Hirc), u šumama Bjelolasice (Kugy), u Slavoniji pod Kapovcem na Krndiji (Hirc). Za Veliku bilježe je Mitterpacher i Piler već g. 1783. (Iter per Poseganam Sclavoniae etc.).

V. opaca Fr. i *V. agrestis* L. Za ove piše Brand (Koch Sÿnop. III. p. 2051.): „Die Art ist ausserordentlich veränderlich. Die meisten Botaniker sehen deshalb *V. polita* und *V. opaca* als beson-

Digitized by Google

dere Arten an und zählen eine Reihe subtiler Unterschiede auf, durch die sich dieselben von *V. agrestis* unterscheiden sollen. Ich habe aber vielfach die Erfahrung gemacht, dass auf die gesammelten Exemplare keine einzige der 3 Beschreibungen passt. Deshalb folge ich dem Vorgange Benthams und halte die Art in dem ihr von Linné gegebenen Umfange aufrecht".

V. hederaefolia Fl. Cr. p. 668. ima se pisati „V. hederifolia" L. Spec. pl. ed. I. (1753.) p. 13. Vidi i Koch Synop. p. 2051.; Halácsy l. c. p. 436.

V. fruticulosa L. Spec. pl. ed. II. (1762.) p. 15. — *V. arvensis* L. Spec. pl. ed. I. (1753.) p. 13. — *V. scutellata* L. Spec. pl. ed. I. p. 12. — *V. Beccabunga* L. Spec. pl. ed. I. p. 12. — *V. Chamaedrys* L. Spec. pl. ed. I. p. 13. — *V. officinalis* L. Spec. pl. ed. I. p. 11.

V. Paederota (L.) Wettst. u Engler-Prantl l. c. Thl. IV. Abth. 3b. p. 85.; Koch Synop. ed. III. p. 2040. — Fl. Cr. p. 678. kao *Paederota Bonarota* L.

U Schlosserovu herbaru (br. 1441./b) ima *V. alpina* L. Na ceduljici čitamo: „In rupestribus montis Rišnjak, 1879."; ubrana je dakle one godine, kad se dr. Schlosser uspeo na taj prezanimljivi vrh sa „Hrv. plan. društvom". Nema je u Fl. Cr., no Neilreich je bilježi (po Zeleboru) za Plješevicu (Plišivica).

Lindernia.

All. Misc. Taur. III. (1755.) p. 178. tabl. 5. „non" L. (Fl. Cr. p. 678.), koji ovaj rod opisuje kao *Vandellia* Mant. I. (1767.) p. 89.

L. pyxidaria All. Stirp. aliq. p. 178. tabl. 5. (1755.) Domovina je ovoj bilini u južnoj i istočnoj Aziji. — Syn. *Vandellia pyxidaria* Maxim. Mél. Biol. Acad. St. Petersb. IX. (1874.) p. 41. — *Pyxidaria procumbens* Ascherson i Kanitz Cat. Corm. et Anthoph. Serb. Bosn. etc. p. 60. (1877.) — Conf. Maximowics et Urban u Berichte d. deutschen bot. Ges. Berlin (1884.) II. p. 436.

Limosella L.

Spec. pl. ed. I. (1753.) p. 631. *(Danubiunculus* Sail.).

L. aquatica L. l. c.

Melampyrum L.

Gen. br. 305.

Digitized by Google

M. arvense L. Spec. pl. ed. I. p. 605. (1753.) — Syn. *M. pseudobarbatum* Schur Sertum flor. Trans. u Verh. d. Siebenbürg. Ver. IV. p. 56. (1853.) — *M. hybridum* Wolfner u Oesterr. bot. Wochenbl. VII. p. 232. (1857.) — Conf. Juratzka u Verh. d. zool.-bot. Gesellsch. VII. p. 117—118. (1857.).

M. barbatum W. et K. l. c. I. (1802.) p. 89. tabl. 86. Oko Rijeke i u dolini Rječine (Hirc). U okolici zagrebačkoj oko Čučerja. „Medju usjevi na briegu Vejalnica. Jun. 1882." — „Inter segetes et in pratis hinc inde, in campis trans Savum. 30. Jun. 1880." (Vukotinović herb. br. 2439. i 2439./a kao var. *angustifolium).*

M. nemorosum L. Spec. pl. ed. I. p. 605. (1753.) — Syn. *M. subalpinum* Juratzka l. c. p. 507. kao „odlika" od *M. nemorosum*, o kojoj raspravlja Kerner opširno u „Schedae" I. p. 32—35. (1881.) — Najveća i najuglednija vrsta toga roda u hrvatskoj flori i ponajkrasniji ures šuma okolice zagrebačke, gdje na mjesta pokriva cijelo šumsko tlo. Mnogobrojno u Zelen-gaju (i sa „bijelim" floralnim listovima), u Maksimiru od „kišobrana" do „lovačke kuće", na Velikom Rogu, u kesteniku na Rebru, na Samoborskom brijegu, na Oštrcu, oko Radoboja, Lepoglave i dr. (Hirc).

M. pratense L. Spec. pl. ed. I. p. 605. (1753.) — Kerner: Ueber die Gattung *Melampyrum*. Oesterr. bot. Ztschrft. XX. p. 270—272. (1870.)

M. commutatum Tausch „nije" sinonim od „M. pratense" (Fl. Cr. p. 681.; Koch Synop. ed. III. p. 2055. br. 5.), već je to posebna forma opisana od Tauscha g. 1851. u Plant. select. et Herb. nr. 1201; Ott: Catal. der Fl. Böhmens p. 37. (1851.); Kerner Fl. exsicc. Austro-hung. br. 631.

Bilješka. *M. commutatum* „Buckel des Gaumens stark gewölbt, nach rückwärts durch einen halbmondförmigen mit der Convexität nach vorn gerichteten scharfen Ausschnitt begrenzt. Griffel über die zottige Oberlippe deutlich vorragend. Connectiv hellgrün. Staubbeutel gelb. Zipfel des Kelches länger als dessen Röhre".

M. pratense L. „Buckel des Gaumens mässig gewölbt, nach rückwärts allmälig verflacht. Griffel über die zottige Oberlippe nicht vorragend. Connectiv olivengrün. Staubbeutel rothbraun. Zipfel des Kelches so lang als dessen Röhre".

Cvijet je u *M. pratense* u donjim dijelovima žut ili sumporastožut, no za ocvjetavanja bojadiše se „ružičasto". U Zelengaju sa predašnjom, a mnogobrojno u zračnim šumama oko Prekrižja i Šestina (Hirc).

Digitized by Google

M. silvaticum L. Spec. pl. ed. I. p. 605. (1753.) — Kerner Fl. exsicc. Austro-hung. br. 628. Conf. l. c. p. 267—270.

Za *M. silvaticum* „Sturm“, koji Fl. Cr. navodi kao sinonim od „M. pratense“ piše Kerner „Was *M. silvaticum* Sturm D. Fl. H. 9. anbelangt, so ist zu bemerken, dass man weder aus der Abbildung noch aus der Beschreibung klug werden kann, welche Art gemeint sei. Der untere Theil der Pflanze auf der Tafel erinnert an *M. silvaticum*, die oberen Deckblätter und die Blüthen an *M. pratense*“.

Za ovu vrstu dodajem k staništima Fl. Cr.: Zgornička na sklopu obručkom, Guslice, Burni Bitoraj, Veliki Risnjak (a „nije“ *M. commutatum*), obično „pod tisom“ na Bijelim stijenama u Velikoj Kapeli (Hirc).

M. silvaticum u Vukotinovićevu herbaru (br. 2434.) jest „M. pratense L.“

M. subalpinum zamjenjuje na Velebitu **M. Velebiticum** Borbás u Oesterr. bot. Ztschrft. (1882.) p. 171. (Einige neue Pflanzenformen, besonders aus der Flora Croatica.) Ova forma ima „verlängerten Blüthenstand, nur an der Spitze blaue Bracteen, kurzhaarige Kelche“.

Bartschia L.

Ima se pisati „*Bartschia*“, a „ne“ Bartsia Fl. Cr. p. 685. — Engler i Prantl l. c. Thl. IV. Abth. 3b. p. 102.[1] Rijetka ta bilina ima do sada samo tri staništa: Visočicu, Badanj i Debelo brdo (Schlosser herb. br. 1420.). Na međi Gorskoga kotara u susjednoj Kranjskoj na Velikom Snježniku ubrao sam nekoliko komada sa strane sjevero-zapadne zajedno sa *Arabis Vochinensis* 15. kolovoza 1885., dok nam iz Gorskoga kotara do sada nije poznata.

Po Nymanu (l. c. p. 549.) ima *Bartschia* ovaj areal: Pyren. (et Arrag.) Alpes Jurass. Voges. Badia. Bavar. Tyrol. Baldus. Monten. Croatia. Hungaria. Transs. Galic. Sudet. Ross. arct. Lappl. Suec. bor. Gotland. Ostrogoth. Vestrog. Norv. Island. Scot. Angl. Avern. alp. subalp. etc. — Synon. *B. parviflora* Thom.

[1] Ovom je bilinom ovjekovječeno ime botaničara Johan. Bartscha, koji se rodio u Königsbergu u Pruskoj, a kao liječnik nizozemsko-zapadno-indijske kompanije prošao Gujanu i Surinam i umr'o u 28. godini svoga života.

Digitized by Google

Parentucellia Viv.

U Fl. Lyb. spec. p. 31. — Fl. Cr. kao **Trixago** Stev. p. p. p. 685. — Engler i Prantl l. c. IV. Thl. Abth. 3b.; Halácsy l. c. p. 436.

P. latifolia L. Spec. pl. p. 604. Fl. Cr. kao *Trixago* latifolia „Rchb." non Mert. (p. 685.) — Syn. *Bartsia latifolia* S. et S. pr. I. p. 428.; Fl. Gr. VI. p. 69. tabl. 586. — *Trixago latifolia* Rchb. Fl. germ. exc. p. 360.; Weiss u zool.-bot. Gesellsch. 1869. p. 745. — *Eufragia latifolia* Griseb. Spic. II. p. 14.

P. viscosa L. Spec. pl. p. 602.; S. et S. pr. I. p. 427. — Syn. *Rhinanthus viscosus* Lam. Fl. Fr. II. p. 354. — *Euphrasia viscosa* Benth. u D. C. Prodr. X. p. 543.

Bellardia All.

U Fl. Ped. I. p. 61. — Fl. Cr. *Trixago apula* Stev. non Rchb. **Bellardia trixago** All. Syn. *Rhinanthus trixago* L. Spec. pl. ed. II. (1672.) p. 840. — *Rh. maximus* Willd. Spec. III. p. 189. — *Bartsia versicolor* Pers. Syn. II. p. 151. — *Trixago apula* Stev. u Mem. Mosq. VI. p. 4. — Biline ovih dvaju rodova bilježi nam Fl. Cr. po Visianiju za Dalmaciju, no *P. latifolia* raste i na Cresu i Osoru. U Schlosserovu i Vukotinovićevu herbaru nema ovih bilina iz naše domovine. U Istri oko Pulja (l. Freyn u herb. Vuk. br. 2455/a).

Odontites Pers. non Dub.

Borbás: De speciebus Odontitidum Hungariae u „Természetrajzi Füzetek" (1898.) XXI. p. 441.—472.

O. Odontites L. Spec. pl. ed. I. p. 604. sub *Euphrasia Odontitide.* Fl. Cr. p. 688. kao *O. serotina* Rchb. — Syn. *Euphrasia serotina* Lam. Fl. Fr. ed. II. (1793.) III. p. 350.; Lam. et D. C. Fl. Fr. (1805.) III. p. 474.; Borbás l. c. p. 462. — *Odontites vulgaris* Moench, Method. (1794.) p. 439. non Stev. — *O. rubra* Gilib. Fl. Lithuan (1781.) II. p. 126. — *Euphrasia Odontites* Pers. Synop. (1807.) II. p. 150. — *Bartschia Odontites* Huds. Fl. Angl. ed. II. (1778.) 1. p. 268. — *B. serotina* Bert. Amoen. Ital. p. 33. — *E. Odont.* var. *angustifolia* Coss. et Germ. Fl. Paris (1845.) I. p. 303. — *E. Kochii* Békésvarm. Fl. p. 81. — *Odon. serotina* Rchb. Fl. germ. excurs. (1831.) p. 359.; *O. rubra* β. *serotina* Beck Fl. v. Nieder-Oesterr. p. 1063.

Digitized by Google

Po Fl. Cr. oko Zagreba (Vuk. herb. br. 2450.), Sudovca i Čanjeva na gori Kalničkoj, po Borbásu oko Lijepih vina (Lepavine), Stativa kod Karlovca (Rossi). Dodajem ova staništa: Na vlažnim livadama dola Klančine kod Bakarca. U Zagorju oko Desinića i Klenovnika; u Slavoniji u poljima oko Čepina. U mom herbaru (kržljav eksemplar) i iz Hercegovine (Gradac; l. Bonetta), no možda *O. canescens*.

O. canescens Rchb. Fl. Germ. (1831.) I. p. 359. pro var. *O. serotinae*, Borbás l. c. p. 466.

Syn. *Euphrasia serotina* Koch, Röhl., Deutschlands Fl. IV. p. 353. Synops. (1837.) p. 547. non Lam. — *Od. rubra* β. *divergens* Willk. et Lange, Fl. Hisp. II. p. 617. — *Euphr. Kochii* Freyn u Baenitz, Herb. Europ. (1876.) br. 2778. — *O. serotina* Hoffm. Oesterr. bot. Ztschr. (1897.) p. 787. — *O. canescens* Hoffm. ibid. p. 234. pro parte.

U Hrvatskoj oko Komorskih Moravica, Grbajela (Borbás) i Tršća (Hirc) u Gorskom kotaru, na otoku Krku u Baščanskoj drazi kod Nove Baške (Hirc). U Dalmaciji oko Zadra (Welden), Spljeta (Petter), na Velebitu (Welden po Borbásu).

Fl. Cr. ne bilježi nam *O. canescens* za Hrvatsku.

O. rigida Borbás l. c. p. 46., gdje je i dijagnoza. U Hrvatskoj na Plitvičkim jezerima (Borbás 8. kolovoza 1875.). U Ugarskoj na više mjesta, u Macedoniji, Rumeliji.

Syn. *O. rubra* Gris. Spicil. Fl. Rumel. II. p. 15. forma „*rigida*“ — G. Beck Fl. v. Süd-Bosnien p. 141. non Gilib. — *O. serotina* Velen. Fl. Bulg. p. 433. Suppl. p. 217.

O. verna Bell. Append. ad Fl. Pedem. (1792.) p. 33. — Syn. *Euphrasia Odontites* β. Linné, Spec. pl. p. 604.; Fl. Danica p. 625.; Willd. Spec. pl. III. p. 194. Scop. Fl. Carin. II. p. 435. — *E. silvestris maior purpurea latifolia* Columna Euphr. I. p. 201. tabl. 202. f. 1. — *E. Odontites* β. *verna* Gaud. Fl. Helv. IV. p. 113. — *E. Odon.* var. *latifolia* Schultes Fl. Austr. II. p. 55. (1800.) — *Bartsia verna* Rchb. fil. Icon. XX. tabl. 107. — *O. verna* Rchb. Fl. Germ. (1831.) p. 359. *O. rubra* α. *vulgaris* G. Beck Fl. von Nied. Oesterr. p. 1063., non Moench — var. *pratensis* Wirtg. Fl. d. preuss. Rheinpr. (1857.) p. 337.

Oko Zagreba na Lašćini (Rossi), oko Dubovca, Karlovca (Borbás). U Vukotinovićevu herbaru nema je iz flore hrvatske, u Schlosserovu (br. 1416.) „in agris, ad fossas et alibi“, i po tome ne znamo za stanište.

Digitized by Google

Orthantha

(Benth.) Kerner. — Engler i Prantl IV. Thl. 3 Abth. p. 101.

O. lutea (L.) Kerner u Fl. exsicc. Austro-hung. br. 154. — Syn. *Odontites lutea* L. Spec. pl. ed. I. (1753.) p. 604. (sub *Euphrasia)*; Fl. Cr. p. 688.

K staništima Fl. Cr. dodajemo ova: „Nad crkvom u Vrapču, na vrhu voćnjaka kod vinograda župničkoga koncem rujna 1870.“; „Na pećini iza Šestinske kapelice (kapelica sv. Roka), u gori zagrebačkoj 5. rujna 1876.“; „In montanis Samobor 6. Septm. 1881.“ (Vukotinović herb. br. 2451/b. kao *Odontites lutea*, pod kojim imenom i u herbaru Schlosserovu br. 1419.). Kod Samobora na Malom Oštrcu; u hrvatskom primorju i oko Grižana, po krasama i umejcima oko Krka, Cresa, na otoku Lošinju na Osoršćici (Monte Osero; Hirc).

Bilješka. *Odontites Corris* Crntz., koju bilježi već Syll. Fr. Cr. (p. 89.) i Fl. Cr. (p. 688.) za Toplice varaždinske, križao je Vukotinović u svom herbaru (br. 2451/b.) i ispravio u *O. lutea*, dok je u Schlosserovu herbaru ostalo ime „neispravljeno“.

Alectorolophus.

All. Fl. Pedem. I. p. 58. (1785.) — Wettstein u Engler i Prantl IV. Thl. 3. Abth. b. p. 103. (1893.) kao *Fistularia (Alectorolophus* Bieb., *Rhinanthus* L. pr. par. — Fl. Cr. p. 689. kao *Rhinanthus* L.

Dr. Jacob Sterneck: „Beitrag zur Kenntniss der Gattung *Alectorolophus*“ u Oesterr. botan. Ztschr. (1895.) p. 7. i d. — Heinricher E.: Kritisches zur Systematik der Gattung *Alectorolophus*. (Sonder-Abdruck aus d. Jahrbüchern für wissenschaftl. Botanik. Bnd. XXXVII. Hft. 4.)

A. minor (Ehrh. Beitr. VI. p. 144. (1791.) sub *Rhinantho*. — Syn. *A. parviflorus* Wallr. Sched. crit. p. 318. (1822.) — *Rh. Crista galli* L. Spec. pl. ed. I. tom. II. (1753.) p. 603. — *Rh. minor* Baumg. Enum. stirp. Fl. transs. II. p. 193. (1816.) — *Mimulus Christa galli* Scop. Fl. Carn. ed. II. nr. 751. (1760.) — *Fistularia Christa galli* Wettst. u Engler i Prantl l. c. — Fl. Cr. kao *Rh. Crista galli* L. p. 689.

Bilješka. „Der Name *Rh. Christa galli* L. l. c. kann zur Bezeichnung unserer Art nicht verwendet werden, trotzdem derselbe der älteste ist und Linné jedenfalls unter diesem Namen den *A. minor* (Ehrh.) Wimm. mitverstanden hat. Denn mit Rücksicht auf die beigegebenen Citate, auf welche bei dem Mangel einer genauen Diagnose

*

Digitized by Google

zurückgegangen werden muss (Fl. lapp. 248.; Fl. suec. 503.; Hort. Cliff. 325.; Roy lugab. 298.) und von denen wieder die Flora lapponica besondere Bedeutung verdient, ist zu ersehen, dass Linné, der a. a. O. mit der var. α *(Crista galli femina* Bauh. hist. 3. p. 436.) offenbar, wenn auch nicht sicher, *A. minor* (Ehrh.) Wimm., mit der var. β. *(Crista galli mas.* Bauh. hist. 3. p. 436.) aber *A. Alectorolophus* (Scop.) m. und vielleicht auch *A. major* (Ehrh) meint, diese Species absichtlich in einem Collectivnamen zusammenfassen wollte". .... (Sterneck l. c. p. 299.)

Ova je vrsta raširena i obična u Evropi. U nas pokriva tu i tamo cijele livade, kao n. pr. na Velikoj Kapeli oko Mošunja (kod Jasenka), gdje je zovu „šuškavac" i „šuštalina", jer „šušti", kad je zreo, a kad šušti, onda treba travu kositi.

Bilješka. *A. alpinus* Baumg. Enum. Stirp. transs. II. p. 194. (1816.), koji navodi Fl. Cr. p. 689. za Visočicu, Badanj, Zvečevo, ne raste u našoj domovini niti ga bilježi Sterneck, već je to *Rhinanthus aristatus* Čelak. — Syn. *Alectorolophus aristatus* Stern. (Hirc: Vegetacija Gorskoga kotara. Rad Jugosl. akademije, knj. CXXVI. p. 73.). O *A. lanceolatus* i *A. angustifolius* vidi Heinricher p. 672. i d.

A. major (Ehrh. Beitr. 6. p. 144. (1791.) sub *Rhinantho.* — Syn. *A. glaber* Beck Fl. v. N. Oesterr. p. 1068. (1893.) — *Rh. major* Koch Synop. II. p. 626. (1840.) — *Fistularia major* Wettst. u Engler i Prantl l. c. — Fl. Cr. p. 690. kao *Rhinanthus major* Ehrh.

Ova je vrsta obična u sjevero-istočnoj Evropi, a i u našoj domovini.

A. hirsutus Allioni Fl. Pedem. I. p. 58. (1785.); Rchb. Iconogr. bot. VIII. p. 13. fig. 976. (1830.); Wimmer Fl. v. Schles. III. p. 409. (1857.) — Syn. *Rhinanthus Alectorolophus* Pollich Hist. plant. Palat. II. p. 177. (1777.); Fl. Cr. p. 690. — *Rh. villosus* Pers. Syn. plant. II. p. 151. (1807.); Sterneck l. c. p. 11. kao *Alectorolophus Alecterolophus* Scop. Raste osobito rado među usjevima.

A. Freynii (Kerner u herb. sub *Rhinantho)* Sterneck l. c. p. 48. našao je Josip Freyn na Veloj Učki (Monte Maggiore) u Istri i odredio kao *Rh. Crista galli* var. U nas u Gorskom kotaru oko Lokava i na Velikom Snježniku (Borbás).

A. glandulosus *(Simonkai* Enum. Fl. transs. p. 432. (1886.) pro var. *Rh. major)* Sterneck l. c. p. 98. — Syn. *Rh. major* var. *glandulosus* Murbeck Beitr. zur Fl. v. Süd-Bosnien u. d. Herzegovina p. 72. (1891.) — *Rh. rumelicus* Velen. Sitzber. d. böhm. Ges. d. Wiss. p. 455. (1887.) — *Fistularia Rumelica* Wettst. u Engler i Prantl l. c. p. 103.

Digitized by Google

U Dalmaciji u Krivošijama (l. Studnička u Herb. Freyn). Lišće, navlastito lice, brakteje i velika čaška posute su žlijezdastim dlakama. Ima je u Bosni, Srbiji, Bugarskoj. Ove su dvije biline **nove** za hrvatsku floru, a naći će se u nas i koja „nova" forma, koju nam opisuje Sterneck.

Primulaceae Vent.

Tabl. II. p. 285. — Koch Synop. d. deutsch. u. schweizer. Fl. ed. III. p. 2160. — Endlicher Gen. n. 729. — Duby Mémoire sur la famille des Primulacées (Genève 1844.) i u D. C. Prodr. Fl. Fr. VIII. p. 33. — Pax u Engler i Prantl IV. 1. p. 98. — Engler, Syllabus p. 178. — Fl. Cr. p. 698.

Primula L.

Syst. nat. ed. I. (1735.); Spec. pl. ed. I. (1753.) p. 143.; ed. II. (1762.) p. 204. — Jacquin Misc. Austr. I. p. 159. — Jussieu Gen. pl. ed. I. p. 96. — Willdenow Spec. pl. I. 2. p. 800. — Benth. i Hook. Gen. II. p. 629.

Dr. Ferdinand Pax, Monographische Uebersicht über die Arten der Gattung *Primula* u Engler Botan. Jahrb. f. Systematik, Pflanzengeschichte u. Pflanzengeographie. Leipzig 1889. Bd. X. p. 74. —241. — Pax, *Primulaceae* u Engler i Prantl IV. 1. p. 98—115. — Fl. Cr. p. 703.

P. elatior L. Spec. pl. ed. I. p. 143. (1753.) pro var. *P. veris*. — Jacq. Miscell. I. p. 158. (1778.) — Syn. *P. elatior* var. *Carpatica* Griseb. i Schenk. Iter Hung. u Wiegm. Archiv p. 320. (1852.) — *P. Carpatica* Fuss. Progr. p. 22. (1852.); Fl. Transs. p. 534. (1866.) — *P. subartica* Schur Sertum p. 61. (1852.); Enum. pl. Transs. p. 552. (1866.).

Poredbena građa. I. Salisburgia. In dumetis ad Juvaviam, a) forma macrostyla, b) forma brevistyla (Eysn.) II. Transsilvania. In pratis et pascuis montium subalpinisque supra oppidum Vöröspatak in Com. Alba inf. (Csató.) Kerner Fl. exsicc. Austro-hung. br. 1368. Fl. Cr. p. 705. navodi ovaj jaglac i za Klek, kojega s ovoga staništa nema u Schlosserovu i Vukotinovićevu herbaru, dapače ga u njima nema ni s jednoga mjesta iz flore hrvatske, i stoga ne mogu odlučiti, koja *Primula* raste oko Klanjca, Krapinskih Toplica, na Mrsinju i u Forkašić-drazi. *Primula* s Kleka „nije" *P. elatior* L., već „*P. officinalis*" L. var.

Digitized by Google

Columnae (Ten.) Pax, koju sam tamo brao 5. lipnja 1898., prof. Heinz 1. listopada g. 1900. (u plodu), a Nikola Faller 30. svibnja g. 1903. u cvijetu. — Fl. Cr. navodi k sinonimu od P. off. *P. inodora*, dodavši mu za auktora „Hoffmanna", koji to „nije", već Gilibert, koji ju je opisao u Fl. Lithuan. I. p. 32. (Pax l. c. p. 178. br. 33.) U Schlosserovu herbaru (br. 1552.) ima *P. elatior* iz južne Hrvatske, ali bez „tačne" oznake staništa.

P. acaulis L. Spec. pl. ed. I. p. 143. (1753.) pro var. *P. veris*. — Jacq. Miscell. I. p. 158. (1778.) — Syn. *P. vulgaris* Huds. Fl. angl. p. 70. — *P. grandiflora* Lamarck Fl. Fr. II. p. 248. — *P. sylvestris* Scop. Fl. Carn. I. p. 132. — *P. uniflora* Gmel. Fl. baden. I. p. 442.

P. acaulis var. *genuina* Pax l. c. p. 180. br. 35. Folia subtus plus minus pilosa. Scapus nullus. Flores pallide lutei.

U nas, navlastito u brežuljkastim i brdovitim krajevima, „najobičnija" vrsta jaglaca i dobro poznata proljetnica, koja procvate u zavjetrinama već koncem prosinca ili početkom siječnja. U zagrebačkoj okolini obično; u prigorju Zagrebačke gore kod Mikulića pokriva cijeli brijeg Topolinu. Po Schulzeru, Kanitzu i Knappu (l c. p. 130. br. 1787.) u Slavoniji samo u Srijemu, ali je ima i u Požeškoj dolini oko Velike i Duboke, pa u Jankovcu i oko Đakova (Hirc). Na otoku Krku oko Dubašnice i Glavotoka (Tommas). Na Plitvicama oko jezera Kozjaka, u Gorskom kotaru na Skradskom vrhu (Hirc). Među tipičkom formom nađe se katkada i var. *caulescens* Pax l. c. p. 180. = *P. pseudo-acaulis* Schur.

Pax daje *P. acaulis* ovaj areal: Hispania borealis (in reliqua rara), Gallia, Anglia, Insulae Faröer, in Alpibus, Germania atlantica et subatl., Scandinavia meridionalis, Hungaria, Transsylvania, peninsula turcica (Balkanski poluotok), Rossia australis, Anatolia borealis, Tauria, Cilicia, Syria borealis, Persia boreali — orientalis, Algeria. Na Balearskim otocima var. *balearica* Willk. sa „bijelim" cvijećem; u Grčkoj var. *rubra* S. et S. sa crvenim cvijećem.

P. officinalis L. Spec. pl. ed. I. p. 142. (1753.) pro var. *P. veris*. — Jacq. Misc. austr. I. p. 159. — Godron i Grenier Fl. Fr. II. p. 448. — Reichenbach Icon. XVII. tabl. 49. — Boissier Fl. orient. IV. p. 24. — Syn. *P. veris* Lehm. Monogr. Primul. p. 27. (1817.) — *P. veris* L. α. *officinalis* L. Spec. pl. I. p. 142. — *P. odorata* Gilibert u Fl. Lithuan. I. p. 32. — Fl. Cr. kao *P. veris* Lehm. p. 704. — var. *genuina* Pax l. c. p. 181. Folia in petiolum

Digitized by Google

attenuata vel contracta, rarius basi subcordata, tenuiter tomentosa. Calyx campanulatus.

P. elatior ima: Folia ovalia vel obovata, in petiolum plus minus late alatum attenuata vel contracta, valde rugosa. Calyx tubuloso-campanulatus, vel ovato-campanulatus, laciniis triangularibus, acutis. Capsula cylindrica, calyce (valde) exserta.

. *officinalis* var. *genuina* širi se cielom srednjom i sjevernom Evropom i seže na Skandinavskom poluotoku do 64° 57′ sjeverne širine.

Po Fl. Cr. raste ovaj jaglac na Ivančici kod Lepoglave, oko Belca, Lobora i Radoboja, u Krbavi na Goloj Plješevici. U Slavoniji (po Schulzeru, Kanitzu i Knappu l. c. p. 130.) „in Wäldern und auf Triften" bez tačne oznake staništa. U Vukotinovićevu herbaru (br. 2710/c.) „nema" ove *Primule* iz naše domovine, dok je u Schlosserovu herbaru (br. 1551.) pohranjena „in alpe Plešivica ad Korenicam" kao *P. veris* L. U generalnom herbaru (br. 3. roda *Primula)* ima *P. officinalis* iz ruke Rossijeve, koji ju je ubrao u dolini Škurinje kod Rijeke 4. travnja 1872. U Vukotinovićevu herbaru (br. 2710/d.) leže na istom listu dvije Primule; jednu je on ubrao na Plješevici g. 1852. i odredio u prvi mah kao *P. farinosa*, no poslije je to ime precrtao i odozgo napisao „P. elatior"; na drugoj ceduljici čitamo „*P. suaveolens* Pers. Na Plešivici, Jun. 1856." Vukotinovićeva *P. elatior* jest „*P. officinalis*", a ona druga u istinu „*P. suaveolens*".

P. officinalis var. **Columnae** (Ten.) Pax l. c. p. 182. *P. Columnae* Ten. Fl. Napol. I. p. 54. tabl. 13. — Kerner u Oe. B. Z. 1875. p. 14. — Syn. *P. suaveolens* Bertol. Journ. de bot. de Paris (1813.) p. 76.; Fl. ital. II. p. 375. — *P. veris* var. *suaveolens* Reichb. Fl. germ. excurs. p. 401. — *P. officinalis* var. *suaveolens* Godr. i Gren. Fl. Fr. II. p. 448. — *P. Tommasinii* Godr. i Gren. Fl. Fr. p. 449. — *P. pyrenaica* Miėg. Bull. de la soc. bot. de France X. p. 28 (?) — Fl. Cr. p. 704. kao *P. suaveolens* Bertol. Folia in petiolum angustum contracta, basi cordata vel subcordata, subtus juniora albo-tomentosa, adulta albo-vel-canescenti-tomentosa. Calyx campanulatus (Pax l. c. p. 182.).

Pax daje ovomu jaglacu ovaj areal: Hispania, Gallia, Helvetia austro-occidentalis, Italia, Istria, Dalmatia, Hungaria, Bosnia, Hercegovina, Macedonia, Thessalia etc., Armenia, ali „ne spominje" Hrvatske, premda je značajan za floru mediteransku hrvatskoga primorja. Visiani u Fl. dalm. vol. II. p. 149. navodi ga za

Digitized by Google

Velebit, Prominu, Beljak, Visočnicu, Stazu i Biokovo, te bilježi narodna imena „jaglica“ i „jaglika“. Nyman l. c. p. 603. navodi ga za našu domovinu. Za Velebit pribilježio je ovu vrstu već Alschinger (Fl. Jadrensis. Jaderae 1832. p. 49.; Oesterr. bot. Wochenbl. 1860. p. 403., gdje je g. 1858. bilježi i za Biokovo); tu ubrana i od saskoga kralja Fridrika Augusta; u Krivošijama oko Crkvice (Brančik)[1]. Po Fl. Cr. p. 704. raste oko Grobnika i Jelenja. K staništima, koja sam pribilježio u „Flori okoline bakarske“ (pos. otis. p. 108.) dodajem Oštrovicu kod Krasice, vrh Sadikovac na Velebitu (29. kolovoza 1892. u plodu) i Mali Risnjak (21. lipnja 1898.). U Gorskom kotaru i na Velikom Tuhobiću i na gorskim lukama oko Fužine (Hirc kao *P. elatior* l. c. p. 109. 19. svibnja 1877.), pa u okolici vrha Medvedaka kod Liča (H.). Schlosser i Vukotinović smjestili su u svojim herbarima *P. Columnae* i *P. Tommasinii* posebice, no ovaj je poslije pod eksemplar, što ga je primio od francuskog botaničara M. Gandogera, pripisao pod *P. Columnae* „P. Tommasinii“.

„Ein sehr reichliches Vergleichsmaterial nötigte mich, die im Vorangehenden unterschiedenen Formen als Varietäten einer Art aufzufassen. So sehr ich mir bewusst bin, wie leicht in der typischen Form var. *Columnae* von der var. *genuina* unterschieden werden kann, so sehr darf ich aber auch die Zwischenformen nicht vernachlässigen, welche sich zwischen die 4 oben[2] genannten Typen einschalten“ (Pax l. c. p. 183. i u Engler i Prantl l. c. p. 106.).

P. farinosa L. Spec. pl. ed. I. p. 143.; Fl. dan. tabl. 125. — Reichb. Fl. germ. excurs. p. 401. — Syn. *P. scotica* Blytt Norges Fl. p. 825. — Fl. Cr. p. 703. „in pratis montanis circa Bosiljevo“ gdje ju je ubrao Klinggräff, kao što nam bilježi i Syll. Fl. Cr. p. 97. U Vukotinovićevu herbaru nema ove modro-cvjetne jaglice iz naše domovine, no našli smo je u herbaru Schlosserovu (br. 1549.) u nekoliko eksemplara. Na ceduljici čitamo: „In pratis humidis, uliginosis ad Varasdinum, Žabnik et alibi“. Po Sadleru i na Velikom Risnjaku (Neilreich Vegetationsv. von Croatien p. 142.), koja tamo sigurno „ne uspijeva“, jer je prije i poslije Sadlera nije nitko ubrao. Bio sam na tome vrhu sedam puta i u razno doba godine, ali sam je badava tražio. Raste po vlažnim,

[1] Reise an d. Küste Dalmatiens im Jahre 1885. u Nyolczadik évfolyam 1885. Evkönyv melyet a Trencsén megyei. Trenčin 1886.

[2] Misli var. *genuina*, *macrocalyx*, *inflata* i *Columnae*.

Digitized by Google

močvarnim, tresetastim mjestima, kakovih na Risnjaku „nema“. Schlosser nam nije pribilježio, kada je ubrao *P. farinosa* kod Varaždina, no svakako poslije g. 1869. i g. 1876., kad je štampana Flora Croatica i Bilinar, jer bi inače to svakako priopćio.

P. longiflora All. Fl. Ped. p. 92. tabl. 39. fig. 3. (1785.) — Pax l. c. p. 201. „Sehr konstante, homostyle Art, die, wie schon aus der angegebenen Litteratur hervorgeht, nur äusserst wenig variirt. Die Blätter sind unterseits nur sehr selten unbepudert“.

Poredbena građa. I. Tirolia orientalis. Pustaria. In graminosis alpinis montis Glanzerkögele supra Windisch-Matrei; solo calcareo et schistoso mixto; 2000—2200 m. (Ausserdorfer). II. Tirolia orientalis. Pustaria. In pratis alpinis et subalpinis vallis Innervillgraten; solo schistoso; 1500—2300 m. u Fl. exsicc. Austro-hung. br. 908. U generalnom herbaru kr. sveučilišta ima *P. longiflora* i iz Schwarzenbacha (Treffer) i sa Schlerna (Bernard), pa iz Švicarske: Mattmarksee (F. O. Wolf).

Po Fl. Cr. p. 703. raste u nas *P. longiflora* na Plješivici (valjada velebitskoj), Visočici i Badnju, ali je nema ni s jednoga staništa u Schlosserovu i Vukotinovićevu herbaru. U herbaru onoga ima *P. longiflora* iz ruke Schlosserove supruge Izabele, koja ju je ubrala na Alpama južnoga Tirola, no u Vukotinovićevu herbaru (br. 2709.) ima jedan eksemplar iz ruke Pichlerove. Na ceduljici čitamo: „*P. longiflora* All. Auf dem Berge Risniak bei Jelenje nächst Fiume im Juni 1869.“, a ima jedan i u generalnom herbaru od Pichlera ubran iste godine na Risnjaku.

Od spomenute godine nije ovaj jaglac nitko na Risnjaku ubrao, bilo da nije došao u zgodno vrijeme, bilo da nije našao njegovo pravo mjesto. Godine 1898. 21. lipnja našao sam *P. longiflora* poviše Maloga Risnjaka na Vukotinovićevoj livadi sa *Linum alpinum* i na veliku radost pohranio u svom herbaru. Bilina će biti veoma rijetka, jer sam našao samo jedan eksemplar.

P. Auricula L. Spec. pl. ed. I. (1753.) p. 143. — Fl. Cr. p. 705. — Syn. *P. lutea* Villars Dauph. II. p. 469. — *P. crenata* Fuss. — Pax l. c. p. 224. br. 126. Na Vranilcu, najvišem brijegu Kalničke gore, sabirao sam ovaj jaglac u plodu 1. rujna g. 1902. Raste u raspuklinama vapnenih pećina sa strane sjeverne, a ima ga i na brijegu Vuklecu iste gore. Fl. Cr. l. c. navodi za Kalničku goru i *P. ciliata* Moretti Add. Fl. Vicent. (1815.) p. 7.; De Primulis Italicis tentamen inaugur. p. 10. (1831.) — Syn. *P. Balbisii* Lehmann Monogr. Primul. p. 45. (1817.) — *P. Auricula*

Digitized by Google

var. *ciliata* Rchb. Icones tabl. 52. f. 3. U generalnom herbaru ima *P. ciliata* iz Tirolia australis, Val di Ledro; in rupestribus alpinis; solo calcareo; 1400—2000 m. (Porta.) (Fl. exsicc. Austro-hung. br. 1386.) U Vukotinovićevu herbaru (br. 2730.) ima jedan eksemplar iz ruke Sturove (Monte Borga .... am Piave, 1. Juni 1855.), dok je sa Kalničke gore „nema", premda je Vukotinović službujući u Križevcima često bio na toj gori, ali ima *P. Auricula* (herb. br. 2731.). U Schlosserovu herbaru (br. 1557.) leže dvije *Primule*, a na ceduljici čitam: „*Primula ciliata* Moretti. Ad rupes Kalnikenses"; jedna nalikuje ovoj vrsti, ali nijesam siguran, da li u istinu potječe sa spomenute gore. Dr. Schlosser običavao je na jedan list metati bilinu sa raznih staništa i iz raznih zemalja, pa je možda ona *Primula* tamo dospjela slučajno. Ja je na Kalničkoj gori nijesam našao. Nyman l. c. p. 604. navodi je za Lombardiju i Tirol, a za Hrvatsku *P. Auricula* L.

P. Clusiana Tausch u Flori IV. p. 364. (1821.) — Fl. Cr. p. 706. kao *P. integrifolia* Jacq. — Syn. *Auricula ursi* IV. Clus. Stirp. Pann. p. 348—349. (1583.) — *P. integrifolia* L. Spec. pl. ed. I. p. 144. (1753.) pr. parte; Jacq. Enum. p. 32. (1762.) non Tausch. — *P. spectabilis* Mert. i Koch u Roehl. Deutschl. Fl. II. p. 116. (1826.); non Tratt. Archiv tabl. 426. (1814.) — Conf. Schott Blendl. Oesterr. Prim. p. 16—17. (1852.) Kerner Fl. exsicc. Austro-hung. br. 1377. Austria inferior. In rupestribus irrigatis montis Göller; solo calcareo; 1100—1200 m. (Fehlner). Po Paxu l. c. p. 225. br. 131. „in Alpibus boreali-orientalibus, solo calcareo: Salisb., Austr. infer., Styria, Carn.; in Transsylvania". Fl. Cr. dodaje kao sinonim i *P. spectabilis* Tratt.

Fl. Cr. navodi ovu vrstu s ljubičastim cvijetom za Paklenicu i Sv. Brdo na Velebitu po Visianiju. U Fl. dalm. (1847.) vol. II. p. 150. dodaje joj Visiani kao sinonim „*P. Candolleana*" Rchb., a opisuje je pod imenom *P. integrifolia* L. i štampa u bilješki ovo: „Planta styraca, de qua loquitur Linnaeus, et cujus iconem praebuit Clusius hist. pl. p. 304. f. sub. est *P. spectabilis* Tratt. tabul. 1. p. 426., *P. Clusiana* Tausch bot. Zeit. 4. 1. p. 364., *P. integrifolia* Jacq. Obs. pl. 1. p. 26. tab. 15., Host Fl. Austr. 1. p. 250., Rchb. Fl. germ. excurs. p. 403. et Icon. cent. I. f. 69., nec aliorum". Ove nam riječi odavaju, da slavni naš zemljak nije mislio bilinu, koju Fl. Cr. opisuje kao *P. integrifolia* Jacq. ili *P. Clusiana* Tausch, već bilinu *P. integrifolia* L. = *P. Candolleana* Rchb., o kojoj čitamo ovu njegovu dijagnozu: „P. foliis ovali-

Digitized by Google

oblongis, utrinque glabris integris, basi attenuatis, margine scapoque 1—3-floro-glanduloso-villosis, calycis teretiusculi pubescentis laciniis oblongis obtusis. Floret Julio. Flores violacei".

Kako Visianijeve biline „nema" u herbarima kr. sveučilišta i kako je to jaglac, koji raste po Paxu l. c. p. 225. „in Pyrenais et Alpibus centralibus Helvetiae", dvojio sam, da pripada flori hrvatskoj. Neilreich Vegetationsv. v. Croatien p. 142. napisao je već g. 1868. za *P. integrifolia* L. ovo: „Eine Pflanze der Pyrenäen und der westlichen Alpen, deren Vorkommen in Dalmatien (t. j. „Croatien") manchem Bedenken unterliegt. Ich hätte eine Verwechslung mit *P. Kitaibeliana* Schott vermuthet, wenn Visiani die Blätter seiner *P. integrifolia* beiderseits kahl angegeben hätte". No pored svega toga navodi Nyman l. c. p. 605. br. 29. *P. integrifolia* Visiani kao „sinonim" od **P. Kitaibeliana** Schott. „*P. integrifolia* Vis. dalm. ex ipso".

Prije i poslije Visianija nije njegovu *Primulu* na Velebitu nitko ubrao, premda su baš na njezina staništa zalazili i domaći i strani botaničari, ali su u okolini Sv. Brda sabirali *P. Kitaibeliana* Schott. Prema svemu onomu, što smo istakli, ima se *P. integrifolia* (L.) Visiani „brisati" iz naše flore. U Vukotinovićevu herbaru (br. 2721.) čuva se *P. Candolleana* = *P. integrifolia* L. iz Švicarske (Lagger; Rehsteiner). U generalnom herbaru ima *P. integrifolia* L. iz „Vorarlbergia. In valle superiore Samina; 1900 m." (Schönach u Fl. exsicc. Austro-hung. br. 1376.), koju nam Reichenbach predočuje u Iconogr. VI. fig. 802—803. (1828.) kao *P. Candolleana*, ali nam je za čudo, da ni kod ove ni kod *P. Kitaibeliana* ne ispravlja Visianija.

P. Kitaibeliana Schott u Oesterr. bot. Ztschrft. II. (1852.) „Ueber eine misskannte Primel" p. 267. i 268. — Fl. Cr. p. 706. kao *P. Kitaibelii* Schott. — Syn. *P. viscosa* Schultes Oesterr. Fl. ed. II. p. 376. (1814.); non Vill. Hist. d. pl. de Dauph. II. p. 467. (1787.) — *P. viscosa* W. Kit. Discript. et Icon. Vol. II. p. XXVIII. (1805.) — *P. integrifolia* Pančić Nov. element. p. 36. (po Paxu). Bilješka Waldsteinova i Kitaibelova, da njihova *P. viscosa* ide u sekciju „Erythrodrosum", bijaše povod, da je H. Schott o tome dvojio. Proučivši zbirku *Primula* muzeja peštanskoga uvjerio se, da taj jaglac pripada u sekciju „Arthritica", a po živim je pojedincima prepoznao „novu" vrstu i posvetio je Kitaibelu, pa nam u spomenutom časopisu podaje i dijagnozu.

Digitized by Google

Schlosser i Vukotinović prvi su put ovaj jaglac ubrali na Kleku g. 1852., a ovaj i g. 1856., 1870., 1877. i g. 1883., koji brijeg bijaše do g. 1852. jedino njima poznato stanište, no Kitaibel je već prije za Velebit pribilježio Samar, Visočicu, Badanj i Debelo brdo (Kitaibel Diar. 11, 12. po Neilreichu l. c. p. 143.) Godine 1856. ubrao ga je na Visočici Vukotinović u plodu.

Već g. 1868. napisao je Neilreich: „Fehlt in allen Nachbarländern", i do novijega doba bijaše *P. Kitaibeliana* „endemička" vrsta za hrvatsku floru, zbog koje je mnogi botaničar osvanuo na našem tubastom Kleku. No ona ne raste baš na najvišem vrhu, već na Malom Kleku ili Klečici, otkuda je ima dr. Schlosser u svom herbaru (br. 1554/c.). Julije Kugy, koji bijaše na Kleku god. 1877., našao je novo stanište na Potkleku (. . . in dunklen Spalten hängen in Tausenden von Exemplaren die Blattrosetten der seltenen *Primula Kitaibeliana*. Oesterr. bot. Ztschrft: Botanische Excursionen in d. süd-kroatischen Bergen p. 62—68.; 93. —100.) Na istom mjestu sabirao sam je i ja 5. lipnja g. 1898., na Visočici na pećinama s istočne strane 26. kolovoza g. 1892., gdje druguje sa *Campanula Waldsteiniana*, a iste godine na Velebitu na Sadikovačkom kuku po osojnim mjestima dolomita, gdje je zapremila sve raspukline, no na svim tim staništima u plodu. Godine 1880. 25. travnja našao ju je L. Rossi u okolici ogulinskoj na novom staništu, na rasklimanom Pećniku, u najbujnijem cvijetu. S ovoga vrha priposlao je Vukotinović 100 eksemplara Kerneru, a ovaj ih je rasposlao pod br. 1381. u Fl. exsicc. Austr.-hung. svima svojim suradnicima, i tako im je dao priliku, da upoznadu ovu rijetku bilinu hrvatske flore. Pichler je za istu svrhu sabirao *P. Kitaibeliana* na dolomitima Alaginca, na Velebitu („in rupestribus umbrosis subalpinis montium Velebit; copiose in declivibus septentrionalibus Alaginac prope Oštarije, solo calcareo, 1500 m.; locus classicus"). U Srbiji na Čedru, u Hercegovini na Velešu (po Paxu l. c.). „Diese Art vermittelt den Uebergang von *P. integrifolia* zu *P. hirsuta*, der sie sich durch die dicht-drüsige Bekleidung der Blätter schon stark nähert" (Pax).

Androsace L.

Spec. pl. ed. I. (1753.) p. 141. — *Androsaces* Ascherson u Fl. Brandenburg (1864.) p. 555. — Engler i Prantl IV. 1. p. 110. — Engler Syllabus p. 178.

Digitized by Google

A. maxima L. Spec. pl. ed. I. (1753.) p. 141. Po Fl. Cr. p. 702. u pokušalištu gospodarskoga društva u **Zagrebu** i oko Stenjevca. Po Klinggräffu među žitom oko Sv. Ivana na Zelini (Linnaea br. 32.). U Schlosserovu herbaru (br. 1548.) i „inter segetes ad St. Xaverium et Šestinam".

A. villosa L. Spec. pl. ed. I. (1753.) p. 142. — Syn. *A. penicillata* Schott. Osim staništa, koja navodi Fl. Cr., i na Postku u Lici (Zeleb.), a po Nymanu i u Dalmaciji (Pichler exsicc.) Najpoznatije je stanište Visočica, gdje sam je i ja sabirao.

A. lactea L. Spec. pl. ed. I. (1753.) p. 142. — Syn. *A. pauciflora* Vill. Hist. des pl. Dauph. II. (1787.) p. 477. Po Fl. dalm. Vol. II. p. 150. „in editioribus montium Velebit, unde misit doct. Dom. *Pappafava*", no po Nymanu i u Dalmaciji (l. c. p. 607.)

Soldanella L.

Spec. pl. ed. I. (1753.) p. 144. — Engler i Prantl IV. 1. p. 111. — Engler Syllabus p. 178.

S. montana Willd. Enum. hort. Berol. (1809.) p. 192. — Syn. *S. alpina major* Clus. Stirp. Pannon. (1583.) p. 353—355. — *S. Clusii* Sims u Bot. Magaz. br. 2163. (1819.) non Schmidt Fl. Boëm. cent. II. p. 50. (1793.) Po Syll. Fl. Cr. p. 98. i oko Bosiljeva. U herbaru Schlosserovu (br. 1559.) iz Gorskoga kotara („in pratis montanis ad Čabar".)

S. alpina L. Spec. pl. ed. I. (1753.) p. 144. — *S. alpina minor* Clus. Stirp. Pannon. (1583.) p. 353—355. — *S. Clusii* Schmidt Fl. Boëm. cent. II. (1793.) p. 50. I na Debelom brdu (Reliq. Kitaibelianae br. 102.). U Schlosserovu herbaru (br. 1558.) sa Visočice i Debeloga brda.

Hottonia L.

Spec. pl. ed. I. (1753.) p. 145. — Engler i Prantl IV. 1. p. 111. — Engler Syllabus p. 178.

H. palustris L. Spec. pl. ed. I. (1753.) p. 145. Značajna bilina za „savišća" okoline zagrebačke.

Samolus L.

Spec. pl. ed. I. (1753.) p. 443. — Engler i Prantl IV. 1. p. 111. — Engler Syllabus p. 178.

S. Valerandi L. Spec. pl. ed. I. (1753.) p. 171. Schlosser (herb. 1571.) bilježi kao stanište i Moslavinu. Na otoku Krku oko Baške

Digitized by Google

nove i Dubašnice (Tommasini). Na močvarnim mjestima u dragi Piškli kod grada Cresa (25. kolovoza 1903. Hirc).

Lysimachia L.

Spec. pl. ed. I. (1753.) p. 146. — Engler i Prantl IV. 1. p. 112. — Engler Syllabus p. 178.

L. vulgaris L. Spec. pl. ed. I. (1753.) p. 146. Bilježim ova staništa: U Gorskom kotaru oko Broda i Kuželja, Lepoglava pod crkvicom sv. Ivana, oko Radoboja, brijeg Ljubelj na Kalničkoj gori, u Severinu u grmlju kraj Kupe, kod Plaškoga na Plavčoj glavi, uz Dravu kod Osijeka, oko Našica i Drenja, oko Zagreba u Tuškancu, Gračanima i druguda (Hirc). Ova se vrsta širi od Evrope do Japana. U glibu i blatu budu vriježe 1—2 m. duge (var. *paludosa* Baumg. Enum. stirp. Transs. I. (1816.) p. 141. kao vrsta).

L. punctata L. Spec. pl. ed. I. (1753.) p. 147. Oko Lepoglave, Radoboja, kod Martijanca uz Plitvicu, na Plavčoj glavi, oko Osijeka i Drenja; u Žumberku oko Stojdrage (Hirc). — var. *verticillata* M. B. Fl. taur.-cauc. I. (1808.) p. 141. kao vrsta. Donje cvjetne stapke sa 2—3 cvijeta. U Vukotinovićevu herbaru (br. 2761.) iz Mikulićâ kod Šestina (lipanj 1871.).

L. Nummularia L. Spec. pl. ed. I. (1753.) p. 148. Katkada mnogobrojno u vlažnim šumama, n. pr. u Martijanskom lugu kod Martijanca; oko Osijeka (Hirc).

L. nemorum L. Spec. pl. ed. I. (1753.) p. 148. — Syn. *Ephemerum nemorum* Rchb. Fl. germ. excurs. (1831.) p. 409.; Koch Synop. III. p. 2164. U Vukotinovićevu herbaru nema ove vrste iz naše domovine, u Schlosserovu (br. 1566.) ima iz Moslavine („in sylvaticis humidis, umbrosis ad Okolje (rect. „Okoli") in Monte Claudii"). U Gorskom kotaru oko Kuželja na jednom brijegu nad potokom Velikom Bjelicom (11. svibnja 1885. Hirc). Oko Crnoga luga i Čabra (Borbás). U šumama Bjelolasice (Kugy). Značajna *Lysimachia* za brdovite krajeve Evrope.

Asterolinum Link et Hoffmannsegg

Fl. port. I. (1809.) p. 332. — Engler i Prantl IV. 1. p. 113. — Fl. Cr. p. 699. kao *Lysimachia* L.

A. Linum stellatum (L.) Lk. i Hoffmanns. l. c. p. 333. — Fl. Cr. p. 699. kao *Lysimachia Linum stellatum* L., koja je bilježi

Digitized by Google

samo za Dalmaciju. U Schlosserovu herbaru (br. 1566/b.) čuvaju se 4 eksemplara ove sitne biljčice i iz Karlobaga („in locis asperis litt. cr. ad Karlobago et alibi"). U generalnom herbaru iz Pulja (Mai 1867. l. Reuss).

Anagallis L.

Spec. pl. ed. I. (1753.) p. 148. — Engler i Prantl IV. 1. p. 114. — Engler Syllabus p. 178. — Fl. Cr. p. 700. navodi kao auktora „Tourneforta".

A. arvensis L. Spec. pl. ed. I. (1753.) p. 148. — Syn. *A. phoenicea* Scop. Fl. carn. ed. II. vol. I. (1772.) p. 139. — *A. mas* Vill. Hist. pl. Dauph. II. (1787) p. 461. — *A. carnea* Schrank, Bayr. Fl. I. (1789.) p. 461. U hrvatskom primorju na školju sv. Marka (Rossi), oko Nove Baške, Omišlja i grada Krka; na otoku Cresu oko Stivana i Osora (Hirc). U Vukotinovićevu herbaru (br. 2749/b.) iz Dalmacije kao *A. pheonicea* Lam. (l. Stalio).

A. coerulea Schreber Spicil. Fl. lips. (1771.) p. 5. Oko Baške nove, Omišlja i grada Krka (Hirc); u Dalmaciji na otoku Braču (u mom herb. l. Vlad. Nazor); u Boki kotorskoj oko Novoga Kaštela (Brančik).

A. latifolia L. Po Fl. Cr. p. 701. „inter segetes circa Zagrabiam, Šestinam et Gračani". U Schlosserovu herbaru (br. 1564.) ima ceduljica, na kojoj čitamo: „*A. latifolia* Mill. Zwischen Saaten um Agram 1855.", no ovo nije drugo nego **A. arvensis** L. i zato se ima *A. latifolia* „brisati" iz hrvatske flore. Po Nymanu l. c. p. 601. ima *A. latifolia* ovaj areal: Lusit., Hisp. centr., mer., Italia mer., Pelop., Zacynth., Byzant. U generalnom herbaru „in montibus Nilagari" (Pl. Indiae or. Ed. R. F. Hohenacher 1851.) . . . . Mehrere Arten im Mittelmeergebiet, so . . . . *A. latifolia* L. u. a. (Engler i Prantl IV. 1. p. 115.) *A. Monelli* L. (a „ne" Rchb.) nije sinonim od *A. coerulea* Schreb., kako čitamo u Fl. Cr. p. 701., već je to posebna vrsta, koja je u generalnom herbaru pohranjena iz Alžira (O. Debeaux, Plantes d' Algérie.) Schlosserova (herb. br. 1565.) i Vukotinovićeva bilina (herb. br. 2751.) jest **A. coerulea.**

Centunculus L.

Spec. pl. ed. I. (1753.) p. 116. — Engler i Prantl IV. 1. p. 115. — Engler Syllabus p. 178.

Digitized by Google

C. minimus L. Spec. pl. ed. I. (1753.) p. 116. U našoj flori najsitnija biljčica, koja bude 1—10 cm. visoka. Raste na vlažnim pjeskovitim i ilovastim mjestima, no kako je sitna, lako se pregleda i stoga poznajemo od nje malo staništa. Schulzer, Kanitz i Knapp ne bilježe nam ovu biljčicu za Slavoniju, no kako ima upravo tamo mnogo prikladna tla, bit će u nekim krajevima obična.

Cyclamen L.

Spec. pl. ed. I. (1753.) p. 145. — Engler i Prantl IV. 1. p. 115. — Engler Syllabus p. 178.

C. europaeum L. Spec. pl. ed. I. (1753.) p. 145. — Syn. *Cyclaminus europaeus* Scop. Fl. carn. ed. II. vol. I. (1772.) p. 135. Za Hrvatsku ne bilježi Fl. Cr. p. 708. nijedno stanište. U zagrebačkoj okolini, navlastito u prigorju Zagrebačke gore, dobro poznat cvijet, a u vrtovima i kao krasnica i jedina vrsta ovoga čisla (hrpe), koja cvate u jeseni, dok sve druge vrste (njih do 10) cvatu s proljeća. Stere se subalpinskim krajevima evropskoga gorja i seže sjeverno do Češke.

Bilježim ova staništa: u Zagorju na Ivančici, Volinskoj špici, Kozjanu, u šumama među Jakovljem i Bistrom, oko razvalina Cesar-grada, u Mihanovićevu dolu kod Klanjca, oko Zajezde, u jarku Cukovcu kod Gotalovca, u šumama oko Belca (sitni, kržljavi pojedinci), oko Zelin-grada, Dolići kod Krapine. Na Kalničkoj gori prama Sv. Martinu, na Malom i Velikom Kalniku, na Vranilcu, u šumi Hruškovici oko Mrzloga zdenca, na Ljublju kod Varaždinskih toplica; u šumi Pilišću na Topličkoj gori. U gornjoj Krajini oko Maloga jezera kod Plaškoga, na Plitvičkim jezerima. U Moslavini u razvalinama grada Garića u drugom dvorištu, gdje pod lijeskama *Cyclamen* u stotinama eksemplara pokriva cijeli prostor izbijajući iz gomolja sa više stablika. U Gorskom kotaru u šumama crnogorice između Delnica i Crnoga luga, Crnoga luga i Lokava, oko izvora Velike Bjelice kod Kuželja, oko Mrzle vodice, otkuda se uspinje na vrh Velikoga Risnjaka, gdje sam ga sabirao u cvijetu 21. lipnja g. 1898. i 8. rujna g. 1901. Po pećinama Ledene jame na Rudaču hrpimice (cv 6. kolovoza 1901.), na Vršku kod Broda—Moravicâ u šumi bukovoj (osobito veliki i bujni pojedinci), na Skradskom vrhu, oko Dobre po šumama bjelo- i crnogorice, tu i na kamenu tlu Jasnoga vrha. U hrvatskom primorju na Suhom vrhu; u Istri oko Veprinca,

Digitized by Google

na otoku Cresu u šumicama pod Stivanom i oko Mereske jame (Hirc). *Cyclamen* cvate u nas od mjeseca srpnja do listopada. Na visokim bregovima cvijeće mu je tamno-grimizne boje i veće; cvate i bijelo, no takovi su bijelci rijetki (Garić-grad).

Aceraceae J. St. Hil.

Expos. famil. II. (1805.) p. 15. p. p.; Lindl. Nat. Syst. ed. II. (1836.) p. 81.; Torr. i A. Gray Fl. Nord-Amer. I. (1838.) p. 245. — *Acerineae* D. C. Théor. élém. ed. II. (1819.) p. 244.; Prodr. I. (1824.) p. 593.; Fl. Cr. p. 384. — *Acera* Juss. Gen. pl. (1789.) p. 50.

Acer L.

Gen. ed. VI. (1764.) p. 546.; Spec. pl. ed. I. (1753.) p. 1054. — Endl. G. n. 5558. — Engler i Prantl III. 5. p. 269. — Pax u Engler: Das Pflanzenreich. Regni vegetabilis conspectus (1901.) IV. 163. p. 6—89. mit 49 Einzelbildern in 14 Figuren und 2 Verbreitungskarten. — Borbás: Species Acerum Hungariae atque Peninsulae Balcanae. Budapest (1891.)[1] Pax u Engler's Bot. Jahrb. VII. (1886.) p. 184.

A. Tataricum L. Spec. pl. ed. I. (1753.) p. 1054. — Syn. *A. cordifolium* Mönch Meth. (1794.) p. 55. — U našoj domovini uz prisojne, šumske, šikaraste okrajke. U okolici zagrebačkoj na Planini kod Čučerja (Wormastini), kod Osijeka u šumi Lipiku, oko Broda na Savi, Kutine i oko Drenja na Krndiji (Hirc). U Slavoniji i oko Čerevića i Karlovaca (Borbás l. c.). Stanište kod Karlovca, koje nam Schlosser bilježi u Oesterr. botan. Wochenbl. (1852. Reiseflora aus Süd-Croatien) II. p. 324., u Fl. Cr. otpalo je. Za Križevce bilježi nam *A. Tataricum* Klinggräff (in Wäldern bei Kreutz. Mai; herb. br. 1091., u plodu), dok ga u Schlosser-Vukotinovićevu herbaru nema iz križevačke okolice. U Klinggräffovu herbaru i iz ruke Pavićeve bez oznake mjesta; na ceduljici čitamo: „*Acer tataricum*. Brežuljci. D. Pavić". Bit će valjada iz okoline požeške, jer je Pavić u Požegi službovao.

A. Pseudo-Platanus L. Spec. pl. ed. I. (1753.) p. 1054. — Syn. *A. opulifolium* Thuill. Fl. de Paris (1790.) p. 280. — *A. procerum* Salisb. Prodr. stirp. in Hort. ad Chap. Allerton (1796.) p. 280. — *A. montanum* Lam. Fl. Fr. II. (1778.) p. 553.

[1] Štampano u Természetrajzi Füzetek. Vol. XIV. part. 1—2. p. 68—80. Sa 1 tablom.

Digitized by Google

Bijeli javor raste u nas u gorovitim, a navlastito u planinskim krajevima domovine. U Gorskom kotaru ima od njega divotnih stabala u Javorovoj drazi na Bitoraju, na Javorju, u Javorovoj dolini. U šumama na Velikoj Kapeli (Klek, Bjelolasica), a oko Jasenka bijeli je javor obično stablo, gdje je Velika i Mala Javornica dobila od njega ime; golema su stabla tamo uz Begovu stazu kod „tjesanca" i na Bijelim stijenama. Od Jasenka do Mollinaryjeva vrška običan je kao grm i stabalce, otkuda zalazi na planine vinodolske. U hrvatskom primorju ima ga poviše Krasice oko Koritnjaka, oko Zlobina, na Velikom Tuhobiću; seže dapače u dolinu Rječine, jer sam ga našao kao grm kod velikih slapova, a na Grobničkom polju na pećinama u koritu potoka Sušice. Ovo je u Hrvatskoj „najjužnija" tačka.[1] Vidio sam jedno stablo i kod Grižana u Vinodolu. U Slavoniji raste bijeli javor kao stablo na Papuku, Dilj-gori, kao grm u Jankovcu i oko Drenja. U okolini zagrebačkoj i u Tuškancu. U hrvatskom Zagorju na Ivančici, Kozjanu, oko Budinšćine, Vižanovca, Klanjca. U Žumberku oko Stojdrage, u Marindolu. Oko Tounja i nad špiljom kod Janje gore; na pećinama Budine ledenice kod Perušića; Takalice na Velebitu (Hirc). Oko Bunića i Gospića (Borbás).

Subsp. **villosum** (Presl Delic. Prag 1822. p. 31.) Parl. — Syn. *A. Pseudo-Platanus* var. *A. siculum* Guss. Fl. sicula II. (1844.) p. 642. — *A. Pseudo-Platanus* var. *convergens* Nicotra u Malpighia VII. (1893.) p. 84. — *A. macropterum* Guss. Exsicc. — *A. nebrodensis* Tin. Exsicc. Pax l. c. p. 17.

„Mittelmeergebiet: Bergwälder um 1500 m. Höhe in Calabrien, Sicilien und auf den Nebroden (Strobl); auch in Dalmatien (Visiani), ohne näheren Standort" (Pax).

Bijeli javor širi se od Pireneja i sjevero-španjolskoga gorja centralnom Francuskom do Alpa, odavde preko Apenina do Sicilije; ima ga od njemačkoga sredogorja do Harza, ali ga nema u ravninama. Širi se uzduž Karpata i njihova prigorja sjeverno do Pruske, spuštajući se na sjeverne gore Balkanskoga poluostrva (Bosna, Srbija, Tesalija). Bijeloga javora ima i na Krimu, pontskom gorju i Kavkazu. U Gorskom kotaru i Velikoj Kapeli zbija se u šume; ima ga u mješovitoj šumi, u bjelo- i crno-gorici, te se uspinje do tjemenice naših najviših planinskih vrhova (Plješevica i dr.)

[1] D. Hirc: Pogled u floru hrvatskoga primorja s osobitim obzirom na šumsko drveće i grmlje. Prešt. iz „Šumar. lista" br. 3., 4. i 5. Zagreb 1891. p. 31.

Digitized by Google

Za β. **typicum** Pax l. c. daje auktor ovu dijagnozu: Folia chartacea vel submembranacea, basi profunde cordata vel rotundato-cordata, irregulariter serrato-incisa vel serrata, sub anthesi tantum secus nervos pubescentia. Fructus adulti saepissime glabri; alae minus latae.

Pax navodi od bijeloga javora 5 subvarijeteta sa cijelim čislom forama. Pribrana građa u svim herbarima kr. sveučilišta tako je malena, da ne možemo priopćiti nijedne forme. Subsp. *villosum* bilježi Borbás za Vratnik kod Senja (1875.) i po Sadleru za Ravnu goru (u herb. nat. muz. Budap.).

A. platanoides L. Spec. pl. ed. I. (1753.) p. 1055. — Syn. *A. platanifolium* Stokes Bot. Mat. Med. II. (1812.) p. 382. — *A. rotundum* Dulac Fl. Hautes-Pyrénées (1867.) p. 241. fig. 26. — *A. Dobrudschae* Pax u Engler Jahrb. VII. p. 238. — *A. laetum* var. *cordifolium* Uechtr. i Sint. u Kanitz Plantae Romaniae (1880.) p. 188.

Ova vrsta javora poznata je u nas kao „mlječak" (Gorski kotar), „mlečec" (Zagorje), „mličik" (Žumberak), „mlječika" (Daruvar). Seže od Pireneja srednjom Evropom u sjeverne krajeve Male Azije, do Kavkaza i Armenije. Ima ga u istočnim krajevima Baltičkoga primorja, u Pruskoj i na poluostrvu skandinavskom, otkuda mu pada polarna granica od 61—62° sjev. širine do 54° na Uralu. Prama jugu seže do Krima, Dobrudže, grčkoga gorja, Epira, Dalmacije, gornje Italije i Cevenna. Zalazi i u nas na alpinske vrhove.

Fl. Cr. p. 386. bilježi nam za ovu uglednu vrstu javora Varaždinske Toplice, Kalnik i Ivančicu, kojim staništima dodajem: Zagrebačku goru (Medvedgrad, Kraljičin zdenac, Lipa, Planina, Veliki Rog), Okić, Samoborski brijeg, Žumberak; u šumama Kleka, oko Delnica (debelih stabala ima u Preseki), oko Broda na Kupi i Kuželja, na Ptičjaku kod Liča, na Kozjanu kod Lepoglave, oko Vidovca kod Varaždina, Daruvara, na Dizdarevu na Krndiji, u Slavoniji i na Papuku (Hirc); u Krbavi na Plješevici (Kit. Diar.[1] 9.).

A. fallax Pax u Engler Jahrb. VII. (1886.) p. 238—239.; Monogr. p. 52. Ovo je **nova** vrsta javora za floru dalmatinsku. Pax ju je našao u herbaru baruna Uechtritza iz ruke Visianijeve bez tačne oznake staništa, što žalimo tim više, što je „endemička"

[1] Diarium itineris croatici. Rukopis, što se u 15 svezaka čuva u budimpeštanskom muzeju; dodani broj znači svesku.

Digitized by Google

vrsta. „Ramuli juniores et petiolis tomentosi. Folia subchartacea, utrinque glabra, subtus lucida basi profunde cordata, aeque longa ac lata vel potius latiora, subseptemloba, sinu basali angustissimo, lobis infimis minimis, omnibus ex ovato cuspidato-acuminatissimis, paucidentatis vel integris. Flores, fructus?“ (Pax).

A. campestre L. Spec. pl. ed. I. (1753.) p. 1055. — Syn. *A. trilobum* Gilib. Fl. Lithuan. V. (1781.) p. 198. — *A. suberosum* Dumort. Fl. Belg. (1827.) p. 113. — *A. collinum* Ten. Syll. Fl. Neapol. (1831.) p. 194. — *A. sylvestre* Wender u Schrift. naturf. Gesellsch. Marburg II. (1831.) p. 250.

Prema sjeveru seže *A. campestre* tako daleko, kao i mlječak, ali raste i na britanskim otocima; prema istoku ima ga samo do zapadne Rusije i u sjevernim krajevima Persije. U nas obično kao grm, ali u zračnoj, mješovitoj šumi kao visoko stablo, n. pr. u Gorskom kotaru u Ljeskovoj drazi kod Kuželja, oko Mrzle Vodice, na Svetoj gori; u okolini samoborskoj zanimljiv gajić oko Dubrave—Kalinovice. Voli prigorje i ne zalazi u alpinsko područje. U zagrebačkoj gori (oko Čučerja poznat kao „maklin“), na Ivančici, u Zagorju kod Maloga Trgovišta na sumporasto-toplu tlu kod Smrdećih toplica, oko Klanjca, Stojdrage, Tounja, Janje gore („klenić“) (Hirc); u hrvatskom primorju u dolini Škurinje kod Rijeke (Borbás), oko Bakra u šumicama i sitnogorici, oko Vrbnika i grada Krka, na otoku Cresu oko Orleca, gdje ga zovu „kjen“, inače poznat kao „klen“ (Hirc).

A. campestre f. **molle** Opiz u Flora VII. (1824.) Beil. I. p. 83. — Syn. var. *quinquelobatum* Masner i Opiz l. c. — var. *mollissimum* Tausch u Flora XII. (1829.) p. 847. — *A. tomentosum* var. *serotinum* Kit. u Linnaea XXXII. (1863.) p. 552.; Pax Monogr. p. 56. — Kerner Fl. exsicc. Austro-hung. br. 2039. Austria inferior. In insulis Danubialibus prope urbem Vindobonam, hinc inde frequens; solo argillaceo, 140 m. (Braun). Folia subtus dense pubescentia. U okolici zagrebačkoj kod Šestina u dolini Ribnjaku, između Podsuseda i Ivanca (Wormastini 25. ožujka 1849. i 22. srpnja 1882. kao *A. campestre).* Perutke u svih su pojedinaca i grimizno obojene.

A. campestre f. **glabratum** Wimmer i Grabowsky Fl. Siles. I. (1827.) p. 364. — Syn. *A. macrocarpum* Opiz u Flora VII. (1824.) p. 546.; var. *saniculaefolium* Borbás u Hirc Fl. okolice Bakarske, p. 36.; Borbás l. c. p. 79. Pax Monogr. p. 56. Ostaje grmolik; na pećinama oko Bakra, u Drazi, oko grada Krka (Hirc). —

Digitized by Google

Kerner Fl. exsicc. Austro-hung. br. 2036. Austria inferior. In nemoribus „Prater“ Vindobonae, raro, solo argillaceo 140 m. Listom nalikuje ova forma lječuri (*Sanicula europaea*). Folia subtus glabra.

A. campestre f. **collinum** Wallr. u D. C. Prodr. I. (1824.) p. 594. — Syn. *A. polycarpum* Opiz u Flora VII. (1824.) Beil. I. p. 82.; — var. *lasiophyllum* Wimmer i Grabowsky Fl. Siles. I. (1827.) p. 364.; Pax Monogr. p. 56. Folia subtus pubescentia. Oko Komorskih Moravica i na Maloj Kapeli kod Vrhovina (Borbás).

A. campestre var. **austriacum** (Tratt.) Observ. bot. fasc. I. (1811.) p. 5. — Syn. var. *acutilobum* Tausch u Flora XII. (1829.) p. 547., Pax Monogr. p. 57. — Kerner Fl. Austro-hung. exsicc. br. 2038. Austria inferior. Colitur in horto botanico universitatis Vindobonensis. Specimina ex arbore a Trattinick pro *A. Austriaco* determinata. Na brijegu Jagodišću kod Podsusjeda (Wormastini, 27. lipnja 1882.) Jedino do sada poznato mi stanište u domovini.

Folia 5-loba, coriacea vel subcoriacea, lobi subintegri, acuminati vel lobulati, lobulis parum tantum prominulis. Tako u tipičke forme, no naš javor ima „Folia subtus pubescentia“ te je f. **Bierbachii** Graf v. Schwerin u Gartenfl. (1898.) p. 106.

Pax Monogr. p. 57. opisuje i *A. compestre* × *monspessulanum*. — Syn. A. Bornmülleri Borbás l. c. p. 75., koji bi se križanac mogao naći u hrvatskom primorju, gdje obje vrste javora katkada rastu u neposrednoj blizini. Ima ga u Hercegovini kod Mostara.

A. obtusatum Kit. u Willd. Spec. pl. IV. (1805.) p. 984.; D. C. Prodr. I. (1824.) p. 594.; Loudon Arbor. brit. I. (1838.) p. 420. V. tabl. 38.; Pax u Engler Bot. Jahrb. VII. p. 223., Dippel Laubholzk. II. (1893.) p. 442.; Graf v. Schwerin u Gartenfl. XLII. (1893.) p. 359.; Hempel i Wilhelm: Die Bäume und Sträucher des Waldes in botan. u. forstwirthschaftl. Beziehung (1889.) II. Abth. p. 48.; Hirc: Nekoje šumsko drveće i grmlje („Šumarski list“ 1899. p. 83.)

Veoma značajna vrsta javora za hrvatsku floru krševitih krajeva domovine. U Gorskom kotaru oko Iševnice, Broda, Grbajela, gdje je grmolik, no u Ljeskovoj drazi porastao je kao visoko stablo (Hirc), kakovih ima i između Brušana i Oštarija na Velebitu (Borbás). Ima ga i na Debelom brijegu kod Delnica, kod Ogulina na Kleku i Pećniku, oko Grbine pećine (spilje) kod Plaškoga, oko Tounja, u Žumberku oko Stojdrage, u Zagorju oko Lobora,

Digitized by Google

Sutinskoga (Vukotinović herb. br. 4827/a. kao *A. Opalus* 1856.), oko Galovca i Gradinskoga jezera na Plitvicama pa uz cestu, što vodi od Kozjaka do Prošćanskoga jezera, u Ćorkovoj uvali kod Petrova sela, oko Vrhovina (Hirc). Po Borbásu u Lici oko Divosela pod Visočicom, na Višerujni, u Krbavi na Mrsinju; Neilreich ga navodi za kraj među Modrušem i Brinjem, Brlog, Vilenu- i Forkašić dragu, Pliševicu, Urlaj, Štirovačku poljanu i Vrebačku stazu (Vegetationsv. v. Croatien p. 214. kao *A. opulifolium* Vill.). Kod Samobora na Samoborskom brijegu (Klinggräff u Linnaea br. 13. kao *A. opulifolium)*, na Lovniku i Plješivici (Vukotinović 1881. i 1855.), obično pod Malim Oštrcem u Dubokom dolu do razvalina grada Lipovca (Hirc).

Fl. Cr. opisuje ga kao *A. opulifolium* Vill. pa mu dodaje za sinonime *Acer Opalus* Ait., *A. neapolitanum* Ten. i *A. obtusatum* Kit.

A. opulifolium Vill. Hist. pl. Dauph. I. (1786.) p. 333. odlika je od *A. italum* Lauth, De Acere (1781.) p. 32.; Pax p. 58. Raste u zemljama oko Sredozemnoga mora i seže od Španije (var. *hispanicum*, *granatense*, *nevadense)* do Orijenta. U Srbiji je rijetko drvo u Aleksinačkoj i Bučanskoj gori (Pančić). Ima ga u Bosni, Crnoj gori, Bugarskoj.

A. opalus (Ait.) također je odlika od „*A. italum* Lauth“ (Pax Monogr. p. 58.), dok je *A neapolitanum* (Ten.) odlika od *A. obtusatum* Kit., koju Pax navodi samo za Napulj. *A. italum* čuva se u generalnom herbaru kr. sveučilišta („Balearium insula Majore ad rupes“, l. Porta i Rigo). Mlade grančice, peteljke i lišće u ovoga su javora „crvene“ poput rubina, i zato ga zovu žitelji Gorskoga kotara „crveni javor“. U generalnom herbaru kr. sveučilišta ima *A. obtusatum* Kit. iz Veprinca u Istri (Pichler). Naš crveni javor ide u subsp. *euobtusatum* Pax Monogr. p. 57. — Syn. *A. obtusatum* Kit. — *A. opulifolium* var. *tomentosum* Koch Synop. Fl. germ. I. (1837.) p. 134. — *A. neapolitanum* Guss. Fl. Sicul. Synop. II. (1844.) p. 643. — *A. opulifolium* var. *obtusatum* Vis. Fl. dalm. III. (1852.) p. 221. — *A. opulifolium* var. *velutinum* Boiss. Fl. Orient. I. (1867.) p. 950. — *A. opulifolium* Schloss. i Vukotinović u Fl. Cr. — *A. obtusatum* var. *tomentosum* Graf v. Schwerin. — *A. Aetnense* Tin. Exs. u Tod. Pl. sicul. n. 701.

A. monspessulanum L. Spec. pl. I. (1753.) p. 1056. — *A. trifolia* Duham. Traité des arbres I. (1755.) tabl. 10. fig. 8. — *A. campestre foliis trilobis* Poll. u Hist. pl. Palatinat. II. (1777.)

Digitized by Google

p. 663. — *A. trilobatum* Lam. Encycl. méth. II. (1786.) p. 382. — *A. trilobum* Mönch Method. (1794.) p. 56. — *A. rectangulum* Dulac Fl. Hautes Pyrénées (1867.) p. 242.

Veoma značajna vrsta javora, poznata u nas kao „šestilj". U hrvatskom primorju od Rijeke do Dalmacije, po Kvarnerskim otocima; raste na pećinama, među raspuklinama, po krasama. Tu i tamo zbija se u hrpe, a najmnogobrojniji je oko Bakra, navlastito u Bukovu, a od Senja do Dalmacije jedino samoniklo stablo. Bude u nas i na 4—6 dm. debelo stablo i ne prelazi iz primorja u krajeve Gorskoga kotara. U Lici i oko Perušića (Kanitz u Reliq. Kitaibelianae, br. 209.). Od šestilja ima u nas više odlika, koje nam Fl. Cr. p. 385. „ne bilježi".

var. **genuinum** Pax Monogr. p. 62. — Syn. f. *gallicum* Graf v. Schwerin l. c. — f. *microphyllum* Boiss. l. c. Folia integra, lobi obtusi vel obtusiusculi, integri vel in eodem ramulo denticulati. Po Paxu u Istri, oko Rijeke, u Dalmaciji oko Dubrovnika, u Hercegovini, ali i u Kranjskoj.

var. **illyricum** Tausch u Flora XII. (1829.) p. 551. — Syn. var. *acutilobum* Spach u Herb. D. C. Po Borbásu l. c. oko Rijeke, Martinšćice, u dolini Rječine, u Drazi, oko Bakra (Hirc). Foliorum lobi anguste triangulares, acuti vel acuminati, saepe fere horizontales; folia basi cuneato-rotundata. Po Paxu u Istri oko Pulja.

var. **commutatum** (Presl) Borbás l. c. p. 74. — Syn. *A. commutatum* Presl Deliciae prag. (1822.) p. 31. — f. *rumelicum* Griseb. Spicil. Fl. rumel. I. (1843.) p. 154. — *A. rumelicum* Borb. u Akad. Közl. XII. (1875.) — f. *cruciatum* Pax Monogr. p. 231. Fructus alae incurvato-cruciatae. Po Paxu u Istri, Srbiji i Banatu, po Borbásu na vrhovima i bregovima oko Rijeke.

Šestilj raste u svim zemljama oko Sredozemnoga mora; seže od Španije do Kavkaza, ima ga u Maroku i Alžiru. Na donjem Dunavu u Banatu prekoračuje sjevernu granicu svoga područja, a navlastito u zapadnoj Evropi, gdje mu se areal širi iz južne Francuske u krajeve rijeke Rajne i Mosele, pa ga ima i u Nahethalu. „Im Ganzen wenig variabel, die einzelnen Formen stark ineinander übergehend und auch nicht scharf pflanzengeographisch begrenzt" (Pax u Regni vegetabilis conspectus IV. 163. p. 62.).

Bilješka. U Srbiji, Hercegovini i Crnoj Gori raste *A. Heldreichii* Orphanides u Boiss. Diagn. Ser. 2. V. p. 71. — Boiss. Fl. Orient. I. p. 949. — Pax Monogr. p. 193. — Syn. *A. macropterum* Vis. Mem. de inst. venet. p. 175. — *A. Visiani* Nyman Consp. p.

Digitized by Google

135. Ova vrsta javora mogla bi se naći u najjužnijim krajevima Dalmacije, navlastito u onima, koji međaše sa Hercegovinom. Raste i u Grčkoj (n. pr. „in monte Parnasso prope Carcaria).

Fosilne vrste. Iz podsusjedskih lapora poznajemo *Acer angustifolium* Heer, *A. integrilobum* O. Web., *A. trilobatum* Sternb. (Pilar: Susedska fosilna flora. Djela Jugoslavenske akademije, knj. IV. Zagreb 1883. Tabl. I.—XV.

Geraniaceae D. C.

Fl. Fr. IV. p. 83. — Engler i Prantl III. Thl. Abth. 4. i 5. p. 1. — Engler Syll. p. 143. — Koch Synop. III. p. 440. — Fl. Cr. p. 388. — *Gerania* Juss. n. 268.

R. Knuth: Ueber die geographische Verbreitung und die Anpassungserscheinungen der Gattung *Geranium* im Verhältniss zu ihrer systematischen Gliederung — u Engler: Botanische Jahrbücher Bnd. XXXII. (1903.) p. 190—230.

G. macrorrhizum L. Spec. pl. ed. I. (1735.) p. 680. — Fl. Cr. p. 394. kao „G. macrorrhizon L." Vrsta planina jugo-istočne Evrope. U Gorskom kotaru na Ptičjaku kod Liča (1. srpnja 1883.), na pećinama u Probijenoj drazi, nedaleko od puta, što vodi na Medvedak (9. kolovoza 1881.); u hrvatskom primorju ispod Suhoga vrha nedaleko Paklena (16. kolovoza 1883.; Hirc), na vinodolskim planinama kod Novoga (Wormastini). U Vilenoj drazi (Reliq. Kitaibelianae br. 219.), oko Perušića (Kit. Diar. 14.), na pećinama spilje Pčeline kod Vrepca (Vukotinović). U Klinggräffovu herbaru (br. 1120.) sa Mrsinja i Velebita (Vukotinović i Schlosser 1852.) Knuth ovu vrstu za našu domovinu ne bilježi.

var. **Dalmaticum** G. Beck u Bot. Centralbl. (1897.) Bd. LXIX. p. 55—56., gdje je i dijagnoza. Ovu za dalmatinsku floru značajnu i novu odliku obreo je auktor 12. lipnja 1894. na Vrhu sv. Ilije[1] na poluostrvu Pelješcu (961 m.) u području od *Pinus nigra* Arn. Ovamo ide valjada i bilina sa Mosora, Prologa, Dinare i Biokova (Visiani Fl. dalm. III. p. 210.).

G. tuberosum L. Spec. pl. ed. I. (1735.) p. 680. U nas samo u Dalmaciji (Zadar, Šibenik, Trogir, Spljet; Visiani Fl. dalm. III. p. 211.) U generalnom herbaru kr. sveučilišta pohranio je ovu zanimljivu vrstu ždralinjaka prof. Jiruš iz Spljeta. (April 1877.)

[1] Ovaj je vrh u nas općeno poznat kao „Monte Vipera". Zovu ga i „Vrh od Pelješca" i „Viper-gora".

Digitized by Google

G. Pyrenaicum L. u Mant. p. 97. i 257. — Syn. *G. umbrosum* W. i K. u Descr. et Icon. pl. rar. Hung. vol. II. (1802.) tabl. 124. p. 131. Na otoku Lošinju po vinogradima (E. Josch[1]) Lošinjska i dalmatinska bilina bit će tipički *G. Pyrenaicum*. Po Wohlfarthu, koji je obradio Geraniaceae u Koch Synop. III. „nije" *G. umbrosum* sinonim od „G. Pyrenaicum", kao što čitamo u Fl. Cr. p. 394., već je od ovoga odlika.

G. sanguineum L. Spec. pl. ed. I. (1735.) p. 683. — Syn. *G. prostratum* Lindl. — *G. lancastriense* With. po Nymanu l. c. p. 136. K staništima Fl. Cr. dodajemo: U okolini zagrebačkoj n. pr. na Komušarevoj pećini, na Rebru, Lipi i Planini; oko Samobora na Okiću i oko Velike Rakovice, u Žumberku oko Stojdrage, u Zagorju na brijegu Sv. triju kralja kod Trakošćana i oko Voće; oko Lukova dola, Severina, Maršanske ograde, na Grobničkom polju, oko Delnica, na Pećniku kod Ogulina, oko Plitvica, na Ljublju i Vranilcu, oko Plitvičkih jezera, na Visočici, rado na vapnenom tlu (Hirc). U Klinggräffovu herbaru (br. 1119.) sa Oštrca i Velikoga Črnca (Vukotinović), iz Like bez oznake staništa (M. Sabljar), pa tako i iz Dalmacije (F. Petter). Raste (po Knuthu) gotovo u cijeloj Evropi.

G. silvaticum L. Spec. pl. ed. I. (1735.) p. 681. — Fl. Cr. p. 395. — Nyman dodaje kao sinonime *G. ranunculifolium* Schur herbar. — *G. alpestre* Schur. — *G. aconitifolium* Knaf. Kako u herbarima nema ove vrste iz naše domovine, nijesam je mogao proučiti.

G. pratense L. Spec. pl. ed. I. (1735.) p. 681. — Syn. *G. napellifolium* Schur herb. — *G. valde-pilosum* Schur herb. po Nymanu l. c. p. 137. Po Fl. Cr. p. 395. oko Zagreba, Markuševca, Vrapča, Samobora, Ruda, ali ga nema ni u jednom herbaru kr. sveučilišta, niti ga je našao Wormastini kao najbolji poznavač zagrebačke okoline. Ova vrsta raste na sredogorju i po livadama u Evropi, nedostaje ga sjevernim krajevima skandinavskoga poluostrva, u Turskoj, Grčkoj, južnoj Italiji; raste u sjevernoj Aziji, dapače i na zapadnoj Himalaji (Knuth). Borbásov „G. pratense" sa Bitoraja bit će valjada *G. silvaticum* L.

[1] Ergebnisse einer botanischen Reise nach der Insel Ossero im Quarnero, unternommen im Mai 1862. u Oesterr. bot. Ztschft. XIII. (1863.) p. 69.

Digitized by Google

G. **palustre** L. Spec. pl. ed. II. (1762.) p. 954. Nema ga također ni u jednom herbaru kr. sveučilišta. Nyman ga navodi za Hrvatsku l. c. 137., ali valjada po Fl. Cr.

G. **phaeum** L. Spec. pl. ed. II. (1762.) p. 953.; Mant. p. 97. Fl. Cr. p. 393. bilježi za ovu vrstu samo Paklenice na Velebitu. Po Kitaibelu oko Varaždina, Ozlja, Cetina (Diar. 4—6.); ima ga oko Karlovca (Sapetza), Lokava, na Risnjaku (Sadler), na Plitvičkim jezerima (Kit. Diar. 8, 13.), kojim staništima dodajem: okolinu zagrebačku (n. pr. mnogobrojno u Tuškancu uza Sofijin put); Jastrebarsko, Mahično, Okić, Kalinovicu, Ivančicu, Oštrc, Lobor, Lepoglavu, Sv. tri kralja; oko Krapine, Topličke gora (Zabreški jarak), Kalničke gora (Ljubelj), na Kuna-gori i Kosteljgradu kod Pregrade; u Švejarovu jarku kod Novoga grada podravskoga, na više mjesta u Žumberku (n. pr. Sošice, Vukotinović herb. br. 4891.), oko Spilje kod Janje gore, na Kleku (Hirc). U šumama Bjelolasice (Kugy), oko Broda na Savi (Martinović J. exs.) Vrsta srednje Evrope (po Knuthu). Cvijeće je obično zagasito-crveno, ali može biti i ljubičasto.

var. **lividum** (L'Hérit.) Koch Synop. III. p. 443.; L'Héritier Geraniologia (1787—1788.) tabl. 39. Cvijeće morgovasto, svaka latica u dnu (macula basalis) sa žućkasto-bijelom pjegom. Ispod Rauchova brijega kod Gračana (prof. dr. Heinz). **Nova** odlika za hrvatsku floru.

G. **nodosum** L. Spec. pl. ed. II. (1762.) p. 953. Fl. Cr. p. 396. navodi ovu vrstu za Oštrc i Dalmaciju, gdje ju je našao za dalmatinsku floru prezaslužni Andrija Alschinger, kad je bio profesor u Zadru. Iz naše flore nema je ni u jednom herbaru kr. sveučilišta, stoga nam je njezino stanište kod Samobora sumnjivo, pa je iz Syll. Fl. Cr. otpao u Fl. Cr. i Mrsinj u Krbavi.

Za Hrvatsku pribilježio je *G. nodosum* već Nikola Host (Fl. Austriaca (1827—1831.) II. p. 385.), a po njemu Neilreich (In Bergwäldern in Croatien l. c. p. 223. br. 3.). U Hrvatskoj i Slavoniji poznajem za ovaj *Geranium* samo „jedno" stanište. Godine 1879. 4. kolovoza našao sam ga uz šumske okrajke puta, što vodi iz Delnica u Crni lug, a drugi put g. 1902. istoga dana i mjeseca, ali mnogo brojnije i u najbujnijem cvijetu.

G. **reflexum** L. Mant. II. p. 257. — Syn. *G. phaeum* Seb. Maur. (po Nymanu l. c. p. 137.) — *G. reflexum* f. *graeca* Terrac. u Malpighia IV. p. 214. — Rchb. Icon. f. 4889. Po Fl. Cr. p. 396. „Ad sepes in Dalmatia". Nema ga ni u jednom herbaru kr.

Digitized by Google

sveučilišta. Po Nymanu (l. c.) Italia med. (mont.), po Halácsyju „in subalpinis Thessaliae: mont. Zygos (Haussk.) et mont. Turnara supra Chaliki (Sint.) in Pindo". (Consp. Fl. Graecae, vol. I. p. 295. br. 7.)

G. pusillum L. Spec. pl. II. (1762.) p. 957. — Syn. *G. malvaefolium* Scop. Fl. Carn. 2. p. 37.; Fl. d. Wett. 2. p. 489. — *G. parviflorum* Curt. Lond. tabl. 36. Oko Zagreba po oranicama (Klinggräff herb. br. 1114.), oko Lepoglave i Osijeka (Hirc). U Dalmaciji i oko Kotora (Pantocsek Adnot. p. 114.)

G. rotundifolium L. Spec. pl. ed. II. (1762.) p. 957. — Syn. *G. malvaceum* Wahlbg. Fl. Suec. p. 434. — *G. subrotundum* i *G. rotundifolium* Hoffm. Germ. 2. p. 65., a „ne" Ehrh., kako navodi Fl. Cr. p. 390.; a od *G. viscidulum* „nije" auktor „Freis", već Fries. Po Kitaibelu (Diar. 7. 8.) na Plitvičkim jezerima, oko Petrova sela i Korenice; na Mrsinju i Goloj Plješevici (Vukotinović u Klinggräffovu herb. br. 1127. kao *G. nodosum* L.) Kod Zagreba na vlažnom tlu oko ženske kaznione, u Zagrebačkoj gori na Šupljastoj pećini (Hirc). U Slavoniji oko Zemuna (Pančić). Na otoku Braču (Nazor), oko Zadra i Gruža (Pantocsek, l. c.)

G. molle L. Spec. pl. ed. II. (1762.) p. 955. — *G. pusillum* Fl. d. Wett. 2. p. 488. I oko Karlovca (Sapetza); oko Osijeka uz poljske putove, u vrtovima; na otoku Lošinju oko Nerezina (Hirc); oko Zemuna (Pančić). U Dalmaciji oko Kotora (Brančik l. c.) U osječkih pojedinaca lišće je veće nego li u primorskih, cvijet sitniji, dok imadu primorski pojedinci polovinom manje lišće, a polovinom veće cvijeće (var. *majoriflorum* Borb. = var. *grandiflorum* Visiani Fl. dalm. III. p. 212.)

G. dissectum L. Spec. pl. ed. II. (1762.) p. 956. Na oranicama oko Varaždina, Zagreba (Kit. Diar. 4. 5.), oko Karlovca (Sapetza), Petrova sela, Korenice, Bunića, Vilene drage, Plitvičkih jezera (Kit. l. c. 8. 10.) U Zagrebačkoj gori u Adolfovcu (Hirc) (Vukotinović herb. br. 4876. kao *G. columbinum)*, u Borongaju i oko Vrapča (Wormastini kao *G. divaricatum* Ehrh.) U Dalmaciji i oko Gruža (Pantocsek l. c.); u Slavoniji oko Zemuna (Pančić) i Broda (Martinović J.)

G. columbinum L. Spec. pl. ed. II. (1762.) p. 956. — Fl. Cr. p. 393. ne navodi za Hrvatsku nijednoga staništa. U Zagrebačkoj gori na Lipi, Planini, Velikom Rogu; oko Lepoglave, Lukova dola (Hirc), u Borongaju (Wormastini), kod Vrapča na pećinama

Digitized by Google

kao sitni pojedinci sa povaljenim grančicama (Vukotinović herb. br. 4875. kao *G. dissectum).*

G. Bohemicum L. Spec. pl. ed. II. (1762.) p. 955. Ova je vrsta **nova** za hrvatsku floru, a pohranjena u herbaru Vukotinovićevu (br. 4874.) iz ruke Borbásove („In rupestribus montis Sladovacsa ad Oštaria 27. srpnja 1881.") U generalnom herbaru iz Wallisa, Alpes de Morcles (F. O. Wolf u Baenitz Herbarium Europaeum) i Sardinije, Monte Limbardo (Reverchon u Plantes de Sardaigne, 1882. br. 253.) Na Balkanskom poluostrvu poznata je ova bilina sa više mjesta u Srbiji, no mjeseca lipnja g. 1892. našao ju je prof. G. Beck na Velikoj Gomili kod Krupe na Uni na mahovinom obraslim pećinama u visini od 700 m. sa *G. lucidum* L. (Bot. Centralbl. 1897. Bnd. LXIX. p. 57.)

G. divaricatum Ehrh. Beitr. 7. p. 164. — Syn. *G. novum* Winterli hort. tabl. 2. — *G. Winterli* Roth. Cat. 2. p. 78. Do sada poznata samo sa Fruške gore kod Čerevića, gdje je ovu vrstu ždralinjaka prvi našao A. Schneller (Schulzer-Kanitz-Knapp l. c. p. 155. br. 2160_{1}). Kako je nema ni u jednom herbaru kr. sveučilišta, ne mogu odlučiti, da li je Ehrhartov *G. divaricatum* istovetan sa ždralinjakom istoga imena, koji opisuju Waldstein i Kitaibel (Descr. et Icon. pl. etc. vol. II. p. 130. tabl. 123.) i bilježe za Ugarsku, gdje raste (po Knuthu) *G. divaricatum* Ehrh.

G. lucidum L. Spec. pl. ed. II. (1762.) p. 955. U hrvatskom primorju i oko Novoga (Wormastini exs.), na „planinama" više Drivenika, na Trsatu; u Zagorju u Resvodama kod Lobora (Hirc). U Krbavi u Vilenoj drazi (Kitaibel), na Burnom Bitoraju (Borbás). U Dalmaciji u Boki Kotorskoj oko Risna (Brančik l. c.)

G. Robertianum L. Spec. pl. ed. II. (1762.) p. 955. U nas najobičnija vrsta ždralinjaka, koja raste u cijeloj Evropi sežući do 68° 12′ sjeverne širine; raste i u Aziji i Americi. Schlosser i Vukotinović ne opisuju drugu sličnu mu vrstu *G. purpureum*, koja je obična u hrvatskom primorju. Opisao sam je po živim pojedincima u Fl. okol. Bakarske br. 153.

G. purpureum Vill. Fl. delph. p. 72.; Boiss. Fl. Or. I. p. 883.; Haussk. Symb. p. 47.; Halácsy Consp. Fl. Gr. p. 301.; Koch Synop. III. p. 456. (kao var. od *G. Robertianum* L.); Icon. Vill. hist. pl. Dauph. III. tabl. 40. U Dalmaciji na otoku Braču (V. Nazor exs.), na Osoršćici (Hirc).

Digitized by Google

G. alpinum. U Fl. Cr. p. 395. dodaje se ovoj vrsti kao auktor „Kanitz“, no bilinu je opisao Kitaibel, a Kanitz samo njegovu dijagnozu priopćio u Reliquiae Kitaibelianae br. 221. *G. alpinum* Kit. jest „forma“ od *G. silvaticum*, kao što ističe sâm auktor u Additamenta ad floram hungaricam br. 263. U Vukotinovićevu herbaru (br. 4890.) s istoga staništa kao *G. lividum* l' Hérit. Na Risnjaku na Schlosserovoj livadi brojno (21. lipnja 1898.; Hirc), otkuda se uspinje pod tjemenicu Velikoga Risnjaka.

Erodium L' Héritier.

Geraniologia (1787—1788.) 44. tabl. — Engler i Prantl III. Th. 4 Abth. p. 9. — Engler Syll. p. 143.

E. malacoides Willd. Spec. pl. III. p. 639. — Syn. *Geranium malacoides* L. Spec. pl. ed. II. (1762.) p. 952. I na otoku Lošinju (Josch) i Braču (V. Nazor exs.) Oko Spljeta sabrao i dr. Jiruš (pojedinci sa povaljenim grančicama); oko Stona uz putove (Bonetta). Za ostrvo (školj) Silbu (Selve) u Dalmaciji pribilježio je ovu vrstu kralj saski Fridrik August već g. 1838.

E. ciconium Willd. Spec. pl. III. p. 629. — Syn. *Geranium ciconium* L. Spec. pl. III. p. 952. Po Fl. Cr. p. 397. na otoku Krku, no Tommasini (l. c.) je ne navodi.

E. cicutarium L' Héritier u Ait. hort. Kew. II. p. 414., a „nije“ auktor „Smith“, kojega navodi Fl. Cr. p. 397. — Syn. *E. pimpinellifolium* Sm. — *E. pilosum* Jord. — *Geranium pilosum* Th. — *E. arenarium* Jord. — *E. commixtum* Jord. — *E. praetermissum* Jord. — *E. sabulicolum* Jord. — *E. parviflorum* Jord. — *E. minutiflorum* Godr. — *E. praecox* Willd. (po Nymanu l. c. p. 140.) Raste osobito rado po kukuruzištima i vrtnim gredama, katkada brojno; na „Krvavim pijeskima“ kod Molva u Podravini (Hirc). U Dalmaciji i na ostrvu Silbi (kralj Fridrik August; fl. *albo;* l. c. p. 31.) — var. *maculatum* Koch Synop. III. p. 458. Veće dvije latice u vjenčiću imadu „macula basalis“, koja je žuto obojena, zagasito ili crno istačkana. Među tipičkom formom. — Syn. *E. pimpinellifolium* Asch. Fl. March. p. 123.

(Nastavit će se.)

Digitized by Google

Dvadeset i prvo potresno izvješće za g. 1903.

Predano u sjednici matematičko-prirodoslovnoga razreda Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti dne 1. veljače 1904.

Sastavio pravi član dr. Mišo Kišpatić.

Kao predjašnjih godina, tako su mi i ove godine pri sakupljanju potresnih viesti ponajviše pomagali povjerenici zagrebačkoga meteorološkoga zavoda, na čemu im ovdje najtoplije zahvaljujem, kao i g. dru. Mohorovičiću, predstojniku toga zavoda, koji mi je pri tom mnogo na ruku išao.

9. siečnja.

U 5 s. 45 m. po podne u *Zagrebu* ubilježio je seismograf slab potres.

20. siečnja.

Oko 10 s. 30 m. prije podne u *Zagrebu* slab potres, koji je samo malo osoba osjetilo.

---

11. veljače.

I. U 2 s. 46 m. prije podne u *Drazi* kod Sušaka osjetiše dosta jak potres, koji je išao smjerom od SI—JZ, a trajao 2 sekunde.

II. U 2 s. 56 m. prije podne u *Drazi* osjetiše drugi, no posve slab potres.

III. U 3 s. 12 m. prije podne u *Drazi* treći potres bio je dosta jak, ali slabiji od prvoga. Uz potres čula se svaki put podzemna mukla tutnjava. („Narodne Novine“, Dužaić.)

O potresu ovom imamo još ove viesti:

Krasica kod Bakra (pošta Meja), u 2 s. 46 m. prije podne osjetiše potres, koji je potrajao $1^1/_2$ sekunde, a bio horizontalan. Iza prve trešnje sliedio je kratak udarac;

u 2 s. 58 m. prije podne osjetio se drugi jači, ali kraći vertikalni udarac, iza koga je sliedio odmah drugi kratki udarac. („Nar. Novine“.)

Digitized by Google

Rieka, u 2 s. 47 m. prije podne osjetiše lagan potres. („Hrvat. Pravo".)

Bakar, oko 3 s. prije podne osjetiše dva okomita udarca u razdoblju od 10 minuta. (Fr. Šišul.)

Bakar, nešto iza 3 s. prije podne osjetiše dva jaka okomita udarca s tutnjavom od kojih 5 sekunda. Ti su udarci mnoge ljude probudili iz sna. (Jos. Pavel.)

Kraljevica, u 3 s. prije podne prilično osjetljiv potres. („Nar. Novine".)

Novi, oko 3 s. u jutro ocutješe vrlo slab potres. (A. Harapin.)

U *Crkvenici* nije potresa nitko opazio. (J. Malus.)

15. veljače.

U 1 s. 58 m. prije podne u *Drazi* vertikalan, dosta jak potres, koji je trajao $1^1/_2$ sekunde, a išao smjerom od I—Z. Tutnjava se nije čula. (Fran Dužaić.)

Bakar, u 2 s. prije podne potres s vertikalnim drmanjem. (Jos. Čukli.)

Bakar, iza 1 s. u noći potres, koji je trajao 3 sekunde; tutnjava uz potres trajala je 5 sekunda. (F. Šišul.)

Bakar, u 2 s. 5 m. prije podne dosta jak potres. Pričinilo se, kao da je mnogo topova na jednom izpaljeno, a iza toga osjetila se trešnja kroz 2 sekunde. („Hrv. Pravo".)

Kraljevica, u 2 s. prije podne potres. („Hrvatsko Pravo".)

17. veljače.

I. U 2 s. 40 m. prije podne na *Sušaku* osjetiše potres, koji bi po jakosti odgovarao drugomu stupnju potresne skale. Čini mi se, da je bio ponešto vertikalan. Središte potresa kao da je bilo nešto odmaknuto od vertikalnoga pravca prama jugozapadu. Neke mi osobe pripoviedaju, da su i ovdje osjetili ona dva potresa po noći prije nekoliko dana, kad se potres osjetio i u Krasici. (Dr. A. Gavazzi.)

O ovom potresu imamo još ove viesti:

Draga, u 2 s. 29 m. prije podne osjetio se ovdje potres u okrugu, a bio je dosta žestok. Meni a i drugima činilo se, kao da se sve kreće u okrug. Trajao je $2^1/_2$ sekunde. Da je bio dosta jak, sliedi i odatle, što je iz sna probudio mnogobrojne osobe u mjestu. I moja školska djeca osjetiše ga velikom većinom. Značajno je to, što je ovaj, kao i druga dva posljednja, imao isti smjer. Ovaj put

Digitized by Google

čula se podzemna mukla tutnjava. Posljedica nema. (Fr. Dužaić, rav. učitelj.)

Bakar, u 2 s. 32 m. prije podne valovit potres, koji je išao smjerom od SZ—JI. On je medju zadnjimi potresi bio najjači te je probudio većinu ljudi iz sna. Tutnjava je trajala razmjerno dosta dugo: preko 10 sekunda. (Jos. Pavel.)

Bakar, u 2 s. 32 m. prije podne potres od SZ—JI. Trajao je 3 sekunde, a tutnjava 8 sekunda. (Fr. Šišul.)

Bakar, u $2^1/_2$ prije podne potres s vertikalnim drmanjem; trajao je 2 sekunde uz primjerenu tutnjava. Vrata su se tresla, a stakleni predmeti, koji su se doticali, zazvečali su. Inače nije počinio štete. (Jos. Čukli.)

Bakar, u 2 s. 35 m. prije podne tako jak potres, da su stvari po kući i prozori pucketali. Pravac potresu bio je od Z—I. („Hrv. Pravo".)

Kraljevica, u 2 s. 30 m. prije podne osjetiše prilično jak potres sa tutnjavom. („Hrvatsko Pravo".)

Potres ovaj osjetiše u *Kukuljanovu*, u *Kostreni sv. Lucije*, kod *sv. Ane* u *Drazi*, pa kod sv. *Kuzme* nad Bakrom. („Nar. Nov.")

II. U 3 s. 25 m. prije podne osjetiše u *Bakru* drugi potres. To je bio samo jedan slab vertikalan udarac. (Jos. Pavel.)

Bakar, u 3 s. 30 m. prije podne potres slabiji od prvoga. („Hrv. Pravo".)

Kraljevica, u 3 s. 25 m. prije podne drugi potres u pravcu prema jugozapadu, kao i onaj u 2 s. 30 m. („Hrvatsko Pravo".)

19. veljače.

U jutro od 4 s. 29 m. do 4 s. 56 m. osjetiše u *Drazi* ova četiri potresa:

I. U 4 s. 29 m. slab potres, koji je trajao $1^1/_2$ sekunde.

II. U 4 s. 33 m. potres, koji je bio malo jači od prvoga, a trajao 2 sekunde.

III. U 4 s. 39 m. posve slab potres bez tutnjave; trajao je 1 sekundu.

IV. U 4 s. 56 m. jak potres, najjači od svih; trajao je 2 sekunde, a završio se s dosta žestokim vertikalnim udarcem, koji se posve jasno razabirao.

Prvi, drugi i četvrti potres pratila je podzemna tutnjava, nalik na daleku grmljavinu. Smjer svih potresa bio je od JI—Z(!). Štete nema. I ovaj put osjetilo je potres dosta osoba. (Fran Dužaić.)

Digitized by Google

Bakar; ovdje smo imali danas dva potresa. Prvi je bio u 4 s. 52 m., a drugi točno u 5 s. prije podne. Oba su bila vertikalna. Ovaj drugi bio je dosta žestok, tako da su prozori zveketali. („Narodne Novine".)

Bakar. od $3^1/_2$ do 5 s. u jutro osjetiše tri potresa, prva dva slabija, a treći jači. Pravac nepoznat. (F. Šišul.)

Bakar; jutros su se osjetila opet dva potresa. Prvi, koji me je probudio, bio je u $4^1/_2$, a drugi u 4 s. 55 m.; oba su bila kratka. Drugi je bio po jakosti jednak najjačemu, koji je bio prošlih dana. (Čukli.)

---

31. ožujka.

U 5 s. 20 m. po podne u *Djakovu* oćutjesmo jak potres, s početka slabo, onda vrlo jak udarac, kao da je top iz sredine zemlje prama gore pukao. Trajao je, dok bi čovjek pet nabrojio. Išao je od Z—I. (Milko Cepelić.)

Djakovo, u 5 s. 28 m. po podne osjetio se dosta jak vertikalan potres, koji je trajao 3—4 sekunde. Štete nema. (Raček.)

Djakovo, u 5 s. 12 m. po podne tri jaka potresna udarca uz podzemnu tutnjavu. Pučanstvo se jako prestrašilo. Štete nema. („Agramer Tagblatt".)

---

15. travnja.

U 4 s. 58 m. po podne u *Drazi* kraj Sušaka osjetio se slab vertikalan potres u pravcu od JZ—SI. Potres je trajao 2 sekunde, a pratila ga je mukla podzemna tutnjava, kao da je u daljini opaljen top. (Fran Dužaić.)

25. travnja.

U 1 s. 53 m. 35 s. po podne u *Zagrebu* ubilježio ovdašnji seismograf lagan vertikalan potres.

28. travnja.

U 6 s. 57 m. prije podne u *Zagrebu* osjetiše lagan horizontalan potres. („Agramer Tagblatt".)

---

14. svibnja.

Oko 2 s. prije podne u *Novom* (Vinodol) čula se podzemna tutnjava. (A. Harapin.)

Digitized by Google

16. svibnja.

U 0 s. 30 m. prije podne u *Novom* osjetio se potres, koji je išao pravcem od SI—JZ, a trajao 3 sekunde. Uz potres čula se i podzemna tutnjava. (A. Harapin.)

25. svibnja.

U 0 s. 15 m. prije podne u *Dolnjoj Stubici* osjetio se slab potres, koji je išao smjerom od SI—JZ, a potrajao 2 sekunde. Potres je pratila posve slaba podzemna tutnjava. (Iv. Strgar.)

---

7. lipnja.

I. U 9 s. 9 m. po podne u *Ivancu* potres, koji je išao smjerom od JI—SZ, a trajao 5 sekunda. Pratila ga je jaka podzemna tutnjava. Zgrade se zatresoše. Prozori zazvečaše, a pokućtvo se drmalo vanredno jako. (Belamarić Šime, šumar.)

O tom potresu imamo još ove viesti:

Lepoglava, u 9 s. 12 m. po podne potres, koji je išao od JI—SZ, a trajao 3 sekunde. Podzemna tutnjava, koja se uz potres čula, trajala je 3 sekunde, a činilo se, kao da se nešto težko valja. Prozori su slabo zazvečali, a obješeni su se predmeti zanjihali. (Dr Eisenbacher Franjo.)

Lepoglava, u $9^1/_4$ prije podne posve neznatan potres. („Narodne Novine".)

Tužno Čerje, u 9 s. 8 m. po podne osjetismo prilično jak potres, koji je išao smjerom od I—Z uz jaku podzemnu tutnjavu. (Vinko Plahte.)

Zajezda, u 9 s. po podne osjetio se ovdje dosta žestok potres, koji je trajao 3 sekunde. Pravac potresu bio je od SI—JZ. („Narodne Novine".)

Klenovnik, u $9^1/_4$ po podne potres od jugoiztoka. Trajao je 3 sekunde, a pratila ga je podzemna tutnjava. Potres je bio horizontalan. Štete nema. (F. Mišinsky.)

II. Oko 10 s. po podne osjetiše u *Ivancu* drugi, slabiji udarac. (Š. Belamarić.)

20. lipnja.

U 9 s. 53 m. po podne u *Drazi* osjetio se dosta jak potres, koji je išao smjerom od Z—I, a trajao je 4 sekunde. Pratila ga je mukla podzemna tutnjava. Posljedica nema. (Fr. Dužaić.)

Digitized by Google

Bakar, u 9 s. 30 m. po podne potres, koji je bio posve kratak. Izvjestitelj nije sam potresa očutio, ali je za nj čuo od drugih, koji su ga jasno osjetili. (Fr. Šišul.)

23. srpnja.

U 11 s. 20 m. prije podne u *Zlataru* kratak okomit potres. U prvi čas pomislio sam, da je netko nada mnom u prvom katu naglo provezao dječja kola. Potres taj očutjeli su i u *Poznanovcu.* (Dr. D. Valjavec.)

4. kolovoza.

I. U 8 s. 23 m. prije podne u *Drazi* posve slab potres. Trajao je nešto preko 1 sekunde.

II. U 8 s. 26 m. prije podne u *Drazi* malo jači potres od prvoga. Trajao je do 3 sekunde. Smjer jednomu i drugom potresu bio je od JZ—SI. Čula se i slaba podzemna tutnjava. (Fr. Dužaić.)

12. kolovoza.

U 4 s. 29 m. 49 s. po podne u *Zagrebu* slab potres. Potres ovaj očutio je i gradski lugar na Sljemenu. Meteorološka postaja javlja: Danas u spomenuto doba zabilježio je seismograf na ovdašnjem observatoriju slab valovit potres u pravcu od SI—JZ, koji je trajao 2 sekunde. Potres se osjetio i u prostorijah observatorija.

Stubica Dolnja, u $4^1/_2$ po podne očutjesmo malen potres, koji je trajao 1 sekundu. Zgrade su se od potresa samo malo uzdrmale. (I. Strgar.)

17. kolovoza.

I. Izmedju 1 s. 45 m. i 2 s. prije podne očutješe u *Pešćenici* kod Lekenika neznatan potres, koji je išao od SZ—JI, a trajao 2 sekunde.

II. U 8 s. 50 m. prije podne u *Pešćenici* potres, koji je išao smjerom od SZ—JI, a trajao 4 sekunde. Uz potres čula se i podzemna tutnjava. Pokućtvo se treslo.

III. U 8 s. 56 m. prije podne u *Pešćenici* neznatan potres, koji je išao smjerom od SZ—JI, a trajao $1^1/_2$ do 2 sekunde.

IV. U 10 s. 3 m. prije podne u *Pešćenici* potres u pravcu od S—J. Trajao je 5 sekunda. Najprije se osjetio vertikalan udarac, a onda trešnja i podzemna tutnjava. Pokućtvo se zaljuljalo. Štete nema. (Medarić.)

*

Digitized by Google

Dva jača potresa u Pešćenici, naime drugi i četvrti, širili su se dosta znatnim prostorom; o njima imamo zabilježene ove viesti:

Zagreb, u $^3/_4 9$ prije podne dva valovita titranja; u 9 s. 58 m. prije podne iznova potres. (Dnevni listovi.)

Zagreb, u 8 s. 46 m. 9 s. prije podne lagan potres, koji se sastojao od okomita udarca i valovita gibanja; trajao je 15 sekunda; u 9 s. 57 m. 13 s. jače valovito gibanje, koje je trajalo 7 sekunda. (Meteorologijski observatorij.)

Marija Bistrica, u 9 s. 53 m. prije podne slab potres. (Brzojavna postaja.)

Stubica, oko 10 s. prije podne slab potres. (Brzojavna postaja.)

Novi Marof, u 8 s. 45 m. prije podne jak potres, poslije ne osjetismo ništa. (Brzojavna postaja.)

Klanjec, ovdje se 17. kolovoza takodjer osjetio potres, no veoma slabo, tako da su ga primietili samo oni, koji su slučajno mirovali. Trajao je jedva 2—3 sekunde. (Ot. Filip, gvardijan.)

Lupinjak, potres od 17. kolovoza ćutjesmo i mi ovdje u Lupinjaku na Sutli (zemaljska granica sa Štajerskom), i to kao i vi u 8 s. 50 m. t. j. onaj prvi udarac, dok drugi udarac više ne primietismo. Udarac sam bio je vertikalan, ali tako, da se ipak s njim spojeni valoviti potres mogao opaziti, koji je došao od sjeveroiztoka. Trajanje je bilo tek nekoliko sekunda. Da ne primietismo onaj drugi jači udarac, čudim se veoma, ali valjada bijasmo većinom vani ili zabavljeni u sobi poslom, koji nas je priečio, da ga nismo primietili. (Lj. Šimunić, zakupnik.)

Klenovnik, u 10 s. 5 m. prije podne potres, koji je išao pravcem od S—J, a trajao 1 sekundu. Uz potres čula se podzemna tutnjava. (F. Mišinsky.)

Ivanić-grad, u 8 s. 37 m. prije podne potres, koji je išao od I—Z, a trajao 1 sekundu. (Kelšin.)

Ivanić-grad, u 9 s. prije podne osjetiše prilično jak valovit potres, koji je došao sa jugo-zapadne strane. Potrajao je do 3 sekunde. („Narodne Novine“.)

Križevac, u 8 s. 48 m. prije podne potres, koji je išao od S—J, a trajao oko 5 sekunda. U zgradi u razizemnom stanu ćutio se potres vrlo neznatno, dok je u II. spratu bio mnogo osjetljiviji, tako da se ravnatelj gospodarskoga zavoda prestrašio i iz sobe izišao. (Hausler.)

Jaska, izmedju 8 i 9 s. prije podne osjetili su pojedini ljudi slab potres. (Ant. Sandri.)

Digitized by Google

Karlovac, ovoga dana osjetiše dva potresa. Prvi je bio u 8 s. 54 m. prije podne, pravac mu je bio JI, što sam opazio po visećoj svjetiljci, koja se zanjihala. Trajao je 2 sekunde. Jakost potresa bila je srednja. Drugi potres bio je u 10 s. 5 m. prije podne u pravcu sjevernom. Bio je jači od prvoga. (Prof. M. Mikšić.)

Pokupsko, u 9 s. prije podne osjetio se ovdje dosta jak potres. Trajao je 1 sekundu. U istom času čula se i podzemna tutnjava. Drugi potres bio je u 10 s. 15 m. prije podne. Bio je nešto slabiji od predjašnjega, ali i on je bio dosta osjetljiv. Trajao je 1 sekundu. Neki ljudi, koji su vani radili, tvrde, da je izmedju ova dva potresa bio još jedan, ali posve slab. Budući da se viseće svjetiljke nisu zanjihale, nego su se samo tresle stiene i tavanice, držim, da je potres bio okomit. (Arnold.)

Pisarovina, i ovdje su toga dana osjetili prije podne dva potresa. Prvi je bio u 8 s. 58 m. On je bio valovit i išao je smjerom od J—S. Drugi potres, kcji je bio mnogo jači, bio je u 10 s. 5 m., a išao je istim smjerom. Prvi je trajao 2 sekunde, a drugi 4—5 sekunda. („Narodne Novine".)

Pisarovina, u 8 s. 58 m. prije podne bio je potres sa tri udarca; trajao je 5—6 sekunda. Drugi potres bio je u 10 s. 5 m. prije podne; on je išao smjerom od J—S, a trajao je 2—3 sekunde, et je bio mnogo slabiji od predjašnjega. Kod prvoga opažalo se valovito gibanje. U drugom dopisu javlja isti izvjestitelj, da je drugi potres bio jači. Kod toga drugog potresa sjedila je jedna osoba na klupi pod starom lipom, pa pripovieda, kako se od potresa stresla klupa i prilično jako i sama golema lipa. (Jalić.)

Lasinja, u 8 s. 40 m. prije podne oćutio se prilično jak potres, koji je trajao 2 sekunde. Pravac mu je bio od SI—JZ. Od potresa stresla se sva občinska zgrada; štete nema;

u 9 s. 50 m. prije podne iznova potres u pravcu od SI—JZ; trajao je 2 sekunde; tutnjava se čula poslije potresa. (M. Markulin, obć. blagajnik.)

Iz *Zdenčine*, *Pisarovine* i *Lasinje* javljaju, da su toga dana oćutjeli potres, koji je došao od Zagreba i išao prama Karlovcu. Prvi se udarac oćutio u 8 s. 40 m. prije podne; trajao je preko pol sekunde i bio dosta jak. Drugi udarac došao je oko 10 s. 10 m. prije podne istim pravcem, a bio je mnogo jači od prvoga. Trajao je gotovo 1 sekundu i zadao dosta straha. U kućah se treslo pokućtvo, njihale su se svjetiljke i slike, a u nekih kućah ukazaše se pukotine. („Obzor".)

Digitized by Google

Velika Gorica, ovdje osjetiše dva potresa. Prvi je bio u 9 s. prije podne; on je bio tako slab, da se jedva osjetio, a trajao je 1 sekundu. Drugi potres bio je jedno 10 minuta iza 10 s. prije podne. On je bio jači, a trajao je 2 sekunde. Predmeti, što su na stieni visjeli, gibali su se prilično jako. Čini se, da je potres bio valovit i da je došao od Zagreba. (F. Peterca, župnik.)

Kravarsko, po kazivanju drugih (sam nisam bio kod kuće) bio je u 8 s. 46 m. prije podne prvi potres; trajao je 4 sekunde, a bio je srednje jakosti. Došao je od JZ, a išao prama SI. U 9 s. 52 m. prije podne osjetio se drugi nešto jači okomit potres uz jak podzemni šum. Trajao je 3 sekunde. (Ivan Bujić.)

Oborovo, u 8 s. 44 m. prije podne potres, koji je išao smjerom od I—Z, a trajao 3 sekunde. Tutnjave nije bilo čuti. Štete nema. (Fran Čop.)

Martinska ves, oko 10 s. bio je ovdje tako slab potres, da ga mnogi nisu ni osjetili. Tutnjave nije bilo, samo se zemlja gibala. Poslije ovoga nije se osjetio drugi potres. (Martin Dogša, župnik.)

Sisak, u 8 s. 40 m. prije podne potres, da se poštarska zgrada stresla. (Brzojavni ured.)

Sisak, u 8 s. 45 m. prije podne kratak potres, koji je išao smjerom od Z—I, a pratila ga je slaba podzemna tutnjava. („Agramer Zeitung".)

Sisak, u 8 s. 40 m. i u 8 s. 45 m. prije podne osjetiše potrese, koji su išli smjerom od Z—I; prvi je trajao 4—5, a drugi 2 sekunde. („Agramer Zeitung".)

Kostajnica; duljim propitkivanjem doznao sam, da su 17. o. m. neki osjetili potres. (J. Binder.)

Dvor, oko 9 s. prije podne opažen je i ovdje potres. Bio je slab, te nije u svakoj kući opažen, pa i tamo, gdje je opažen, nisu ga svi ukućani osjetili. Pravac se nije mogao odrediti poradi slabosti. Trajao je 4—6 sekunda. (Mile Trubić.)

Hrastovica, u 8 s. 56 m. prije podne potres, koji je išao smjerom od Z—I, a trajao 3 sekunde uz malu podzemnu tutnjavu. Prozori se stresoše, a slike i drugi predmeti se pomaknuše. (Jozo Mrazovac.)

Petrinja, u 9 s. prije podne jak potres od 3 sekunde, S—J, vodoravan, drhtanje. (Brzojavna viest V. Benaka.)

Petrinja; danas u jutro pred 9 s. jak potres od sjevera na jug; počeo je s vodoravnim smjerom od sjevera prama jugu i onda natrag uz oštar trzav udar, tako da su prozori zveketali, stiene

Digitized by Google

škripale, sa svoda žbuka sipala i svodovi popucali. U nekih su kućah ure stale, a u oružničkoj vojarni se težak ormar s mjesta ganuo. Drugih ozbiljnih posljedica nije bilo.

Iza toga potresa došao je drugi, no mnogo slabiji. Kako sam u poslu bio, ja ga nisam osjetio, ali su ga osjetili mnogi drugi.

Pred 10 s. došao je treći potres, koji je bio slabiji od prvoga, a jači od drugoga. Baveći se poslom nisam mu pravca jasno razabrao, ali mi se čini, da je od juga došao.

Prvi potres trajao je 3, a drugi 2 sekunde. Ovaj treći bio je okomit. Pred potresom nije se čula tutnjava, no za vrieme potresa mogao se razabrati šumeći zvuk poput vjetra. Pred prvim potresom bijahu patke nemirne, pa su plahovito gakale. (V. Benak.)

Petrinja, u 8 s. 44 m. prije podne prvi potres, koji je trajao 2 sekunde, a išao smjerom od I—Z. Potres se sastojao od udarca, koji je bio dosta jak, da ga je osjetilo cielo stanovništvo. Drugi, slabiji udarac bio je u 9 s. 55 m. prije podne. (Mudrinić.)

Petrinja, u 8 s. 43 m. prije podne jak potres, koji je išao smjerom od SI—JZ. Trajao je gotovo 10 sekunda. Potres je bio vrteći. U sobah se sve streslo. Ljudi, koji su se u kolih lagano uz brdo vozili, osjetili su živo ovaj potres. U 8 s. 45 m. bijaše drugi potres, no vrlo slab, dok je u 9 s. 50 m. prije podne bio treći, koji je bio mnogo jači od drugoga, ali mnogo slabiji od prvoga. („Hrv. Pravo".)

Gore, u 8 s. 40 m. prije podne osjetiše priličan potres, koji je trajao 3 sekunde. („Hrvatsko Pravo".)

Glina; ovdje osjetiše dva potresa: prvi u 8 s. 45 m., a drugi točno u 10 s. prije podne. Zadnji je bio jači od prvoga. Oba su potresa došla od jugo-zapadne strane, a potrajali su jedno 3—5 sekunda. („Narodne Novine".)

Glina, u 8 s. 45 m. prije podne osjetio se ovdje prvi potres; u 10 s. 5 m. prije podne bio je drugi dosta jak potres u jugo-zapadnom smjeru. Pokućtvo se u kućah dosta znatno gibalo, a pogotovu slike na stienah. Prvi i drugi potres trajao je najdulje, do 3 sekunde. Štete nije bilo nikakove. (Banjeglav.) Sličnu viest ima i „Obzor".

Topusko; oko 8 s. 45 m. prije podne osjetio se jak potres, koji je trajao 3 sekunde, a došao s juga. Potres je bio valovit. Štete nema. — Oko 10 s. prije podne osjetio se iznovice jak potres, koji je takodjer došao od juga, a trajao 2 sekunde. Štete nema. (Miloš Petković, ljekarnik.)

Digitized by Google

Vrginmost, u 8 s. 40 m. prije podne jak kratkotrajan potres u pravcu od JZ—SI. (Brzojavka kotarskoga ureda.)

Vojnić, u 8 s. 40 m. prije podne osjetio se potres, koji je trajao oko 2 sekunde. Istoga dana osjetio se lak potres oko 11 s. prije podne u obližnjem selu *Utinji* udaljenom od Vojnića 13 kilometara po pripoviedanju tamošnjega paroha. (P. Ribar.)

Kutina, u 8 s. 49 m. prije podne potres, koji je trajao do 3 sekunde, a išao smjerom od JZ—SI. Gibanje je bilo valovito. Predmeti su se po sobah gibali. Drugi potres toga dana nismo osjetili. (Dr. Jos. Hoholač, kot. predstojnik.)

Negativne viesti primili smo iz ovih mjesta: *Banjaluka*, *Bjelovar*, *Daruvar*, *Divuša*, *Dunjak* kraj Vojnića, *Garešnica*, *Gradiška Nova*, *Gradiška Stara*, *Sv. Ivan Zelina*, *Jasenovac*, *Jelenska Gornja*, *Koprivnica*, *Kraljev Vrh*, *Krapina*, *Krapinske Toplice*, *Križevac*, *Lepoglava*, *Ludbreg*, *Pakrac*, *Pregrada*, *Rasinja*, *Rieka Gornja*, *Rujevac Savski Marof*, *Slunj*, *Zabok*, *Zlatar*, *Zrinj*, *Varaždin*, *Varaždinske Toplice*

21. kolovoza.

U 5 s. 16 m. 49 s. po podne u *Zagrebu* ubilježio je seismograf slab potres.

23. kolovoza.

U 11 s. 39 m. 40 s. po podne u *Zagrebu* slab potres, koji je seismograf ubilježio. Potres je bio valovit, trajao je 3 sekunde, a išao smjerom od SI—JZ.

Stenjevac, u 11 s. 39 m. po podne potres. Stete nema. Pošto sam spavao, a potres me probudio, to nisam mogao o smjeru i trajanju ništa ustanoviti. (L. Ivančan.)

Kraljev Vrh, oko $^3/_4$12 u noći, upravo sam bio budan, osjetio sam jak kratak udarac, koji nije nikakve štete načinio. I moji ljudi o njemu govore. (Večković.)

Bračak kod Zaboka, u 11 s. 45 m. po podne bio je potres s vertikalnim smjerom, a trajao je 2—3 sekunde. (Grof Kulmer.)

Brzojavno ravnateljstvo javlja: Od svih upitanih brzojavnih ureda jedino je *Dugoselo* očutjelo potres. Uzrok će biti kasno doba noći. Zagorje, Posavina i predjel prema moru ne znadu ništa o potresu, isto tako najbliža okolica Samobora, Jaske i Siska.

Digitized by Google

24. kolovoza.

U 9 s. 21 m. 47 s. prije podne u *Zagrebu* ubilježio je seismograf slab potres.

---

13. rujna.

U 11 s. po podne u *Planini* potres, koji je išao smjerom od Z—I, a trajao 3 sekunde. Tutnjava se čula kroz 4 sekunde. Štete nema. (B. Feigl.)

Moravče, u 10 s. 53 m. po podne osjetismo ovdje potres smjerom od Z—I. Udarac je bio okomit, a iza njega gibala se zemlja još koje 4—5 sekunda. Štete nema. (V. Šantek.)

---

8. listopada.

U 11 s. 23 m. prije podne u *Ledenicah* potres, koji je trajao 2 sekunde, a išao smjerom od JI—SZ uz muklu tutnjavu. Štete nema. (M. Prebeg, učitelj.)

11. listopada.

U 2 s. 50 m. prije podne u *Virovitici* osjetiše dosta jak potres, koji je trajao 3 sekunde. Prije potresa čula se podzemna tutnjava, a zatim je nastala trešnja. Potres je bio vertikalan, jer se nisu njihale lampe ni slike. (Besz.)

O tom potresu imamo još ove viesti:

Gradina (kotar virovitički), u $^1/_2 3$ u jutru osjetio se u obćini Gradini potres sa žestokim udarcem i podzemnom tutnjavom, koji je potrajao 8 sekunda. Potres je išao od I prama Z. („Nar. Nov.“.)

Lukač, u 2 s. 55 m. prije podne osjetio se dosta žestok potres, koji je išao smjerom od Z—I, ali nije učinio nikakve štete. („Narodne Novine“.)

Ferdinandovac, u 2 s. 45 m. prije podne osjetio se potres s tutnjavom i dosta jakim udarcem. Trajao je 3 sekunde, a išao pravcem od SI—JZ. Bez štete. (Farkaš.)

Čaglić, 2 s. 31 m. prije podne bio je valovit potres u pravcu od S—J i tako jak, da se n. pr. krevet nagnuo i da se s krovova runio krš od criepa i žbuke. Sviet ne znajući, što je, skakao je iz kreveta u strahu, da se kuća pod teretom kukuruze ruši. Za potresa čuo se šum u zemlji i u zraku. Neki su prije ovoga po-

Digitized by Google

esa osjetili slabiji potres oko pol noći, no ja ga nisam osjetio. (Šafran, župnik.)

Čaglić, u 2 s. 3 m. prije podne osjetismo valovit potres smjerom od S—J. S krovova runio se krš od criepa i žbuke. Kreveti su se nagibali na jug; pod zemljom je drmalo, a u zraku šumilo. Sličnu viest dobismo i iz Cabune. („Hrvatsko Pravo".)

Suhopolje (virovitički kotar), oko $2^1/_2$ prije podne ućutio se dosta jak potres, koji je išao od S—J. („Obzor".)

Pakrac, u 2 s. 30 m. prije podne osjetio se jači potres, koji je trajao 4 sekunde. Potres je bio vertikalan od juga prema sjeveru. Ura je stala, viseće su se stvari njihale. (F. Cenić.)

„Narodne Novine" pišu: Javljaju iz *Pečuha*, da se tamo u isto doba ućutio jak potres, koji je trajao više časaka i napravio medju pučanstvom veliku stravu. Nekoliko je zidova na kućah popucalo. Iz *Barča* se takodjer javlja, da se toga dana u 3 s. prije podne ućutio prilično jak valovit potres, koji nije nanio nikakve štete.

30. listopada.

m. prije podne u *Lukovu* potres.

II. U 9 s. 20 m. po podne u *Lukovu* potres.

III. U 9 s. 23 m. po podne u *Lukovu* potres.

Uza svaki ovaj potres čula se podzemna tutnjava prije i poslije trešnje. Smjer za sva tri potresa čini se da je bio od J—S. Potres je svaki put s tutnjavom trajao oko 3 sekunde. (V. Potočnjak, župnik.)

U *Senju* ućutješe ova ista tri potresa. Oko 10 s. prije podne prvi potres. U $9^1/_2$ s. po podne osjetiše jak udarac, a odmah za tim sliedio je drugi slabiji potres. Za sva tri potresa kao da je bio smjer od JI. („Narodne Novine".)

Ledenice, u 10 s. 52 m. prije podne osjetio se ovdje valovit potres u smjeru od I—Z uz muklu podzemnu tutnjavu. Potres je trajao 3 sekunde. Štete nema. (Mih. Prebeg.)

30. studenoga.

U 2 s. 45 m. prije podne osjetiše neki ljudi u *Maksimiru* kraj Zagreba slab potres. I seljaci iz okolice pripoviedali su, da su u to doba osjetili slab potres.

Digitized by Google

2. prosinca.

U 0 s. 8 m. prije podne u *Drazi* kod Sušaka osjetio se slab valovit potres, koji je trajao 3 sekunde, a išao smjerom od Z—I. Potres je pratila slaba podzemna tutnjava, slična hujanju vjetra. (Fran Dužaić.)

Crkvenica, u jutru 30 minuta iza polnoći osjetio se ovdje slab potres, koji je trajao 3 sekunde, a došao, kako se čini, od juga. (Ivan Kostrenčić.)

21. prosinca.

U 0 s. 8 m. po podne bio je u *Zagrebu* kratak valovit potres. Ja sâm potresa nisam očutio, ali mi je više osoba pripoviedalo, da su potres osjetili.

O tom potresu imamo još ove dvie viesti:

Moravče, u 0 s. 13 m. po podne osjetio se ovdje dosta jak valovit udarac potresa, koji je trajao 5 sekunda. Prozori su zvečali, a posudje u ormarih zazvonilo. Neki vele, da je pravac bio od I—Z, a drugi opet baš obrnuto od Z—I, što je i vjerojatnije. (V. Šantek.)

Dugo selo, u 0 s. 8 m. po podne potres, koji je trajao 2 sekunde, a išao smjerom od SZ—JI. Uz potres čula se podzemna tutnjava. („Narodne Novine“.)

Broj potresa, što nam ga je kronika godine 1903. ubilježila, nešto je manji od onoga, što smo ga godine 1902. naveli. Godine 1903. dojavljen je u svem 41 potres u 28 dana, dok je godinu dana prije toga bilo u naših krajevih 48 potresa u 39 dana. Svi ti potresi razdjeljuju se godine 1903. na pojedine mjesece evo ovako:

U siečnju (9., 20.)	2	potresna	dana	sa	2	potresa
U veljači (11., 15., 17., 19.) .	4	„	„	„	10	„
U ožujku (31.)	1	„	„	„	1	„
U travnju (15., 25., 28.) . .	3	„	„	„	3	„
U svibnju (14., 16., 25.) . .	3	„	„	„	3	„
U lipnju (7., 20.)	2	„	„	„	3	„
U srpnju (23.)	1	„	„	„	1	„
U kolov. (4., 12., 17., 21., 23., 24.)	6	„	„	„	10	„
U rujnu (13.)	1	„	„	„	1	„
U listopadu (11., 13.) . . .	2	„	„	„	4	„
U studenom (30.)	1	„	„	„	1	„
U prosincu (2., 21.)	2	„	„	„	2	„
Ukupno	28	potresnih	dana	sa	41	potresom.

Digitized by Google

Što se seismijske djelatnosti pojedinih krajeva tiče, to se godine 1903. pokazuje velika sličnost s onom od godine 1902. Kao predjašnje, tako je i ove godine najveći dio ubilježenih potresa imao svoje izhodište u dva kraja. Jedni potresi imali su svoje ognjište u okolici zagrebačkoj, dok su drugi potekli iz proloma, koji se vuče duž hrvatskoga primorja, te su prema tomu god. 1903., kao i 1902., u najvećoj djelatnosti bile zagrebačka i bakarska potresna pukotina. Osim potresa zagrebačke i bakarske potresne pukotine imamo u ovom izvješću samo još tri potresa, koji su svoje ognjište drugdje imali.

1. **Zagrebačka potresna pukotina** izvela je 24. *listopada* 4. *studenoga* 1902. dva ojača potresa, koji su po svojoj jakosti odgovarali 4. stupnju Forelove skale, pa to je bio početak malene periode, iz koje smo ubilježili prošle godine u studenom pet i koncem prosinca jedan slab potres. Ta perioda zahvatila je i u godinu 1903., gdje je 9. *siečnja* i 20. *siečnja* ubilježen u *Zagrebu* posve slab potres; prvi je ubilježio seismograf, dok je drugi samo malo ljudi osjetilo.

25. *travnja*, dakle iza mirovanja od dva mjeseca, ubilježio je seismograf u *Zagrebu* posve slab potres.

28. *travnja* opet u *Zagrebu* posve slab potres.

25. *svibnja* osjetiše u *Stubici Dolnjoj* slab potres, koji moramo takodjer svesti na zagrebačku potresnu pukotinu.

23. *srpnja* zabilježiše malen potres u *Zlataru* i *Poznanovcu*, pri čem je sjedište potresu bilo u sjevernom dielu zagrebačke potresne pukotine.

12. *kolovoza* slab potres u *Zagrebu*, na *Sljemenu* i u *Stubici Dolnjoj*.

17. *kolovoza* skočilo je potresno ognjište na zagrebačkoj potresnoj pukotini sa sjevera na jug. Toga dana zabilježiše u *Peščenici* kod Lekenika četiri potresa, dva jača i dva slabija. Oba jača potresa razširiše se dosta znatnim prostorom, koji se izteže u obliku elipse, kojoj duga os ide od sjevera prema jugu, te se sudara s pravcem, kojim smo položili zagrebačku potresnu pukotinu. Potrese te osjetiše idući od sjevera prema jugu u ovih mjestih: *Lupinjak, Klenovnik, Klanjec, Novi Marof, Stubica, Bistrica. Zagreb, Križevac, Ivanić, Jaska, Karlovac, Pokupsko, Pisarovina, Lasinja, Velika Gorica, Kravarsko, Oborovo, Martinska ves, Sisak, Kostajnica, Dvor, Hrastovica, Petrinja, Glina, Topusko, Vrginmost, Vojnić* i *Kutina*. Na sjeveru u Zagorju bio je potres vrlo slab, isto tako na jugu

Digitized by Google

kod Dvora, dok je u sredini onoga pravca, koji spaja Dvor sa sjrvernim dielom Zagorja, bio najjači, pa to jasno govori, da u tom pravcu leži potresna pukotina, koja je potres stvorila, i da mu je ognjište bilo u savskoj ravnici. U našoj potresnoj kronici ima više potresa, koji su se istim prostorom širili, pa u tom smo i našli dokaz, da zagrebačka potresna pukotina poprieko presieca iztočni dio zagrebačke gore, jer se na toj crti potresna ognjišta često sele.

21. *kolovoza*, dakle četiri dana kasnije, ubilježen za *Zagreb* vrlo slab potres.

23. *kolovoza* skočilo je potresno ognjište, koje je 17. kolovoza bilo na jugu, nešto na sjever, jer taj dan imamo ubilježen potres za *Zugreb, Stenjevac, Dugoselo, Kraljev Vrh* i *Bračak* kod Zaboka.

24. *kolovoza* bio je iznova slab potres u *Zagrebu*.

13. *rujna* osjetiše potres u *Planini* i *Moravču*, dakle upravo ondje, gdje zagrebačka potresna pukotina presieca zagrebačku goru.

30. *studenoga* osjetiše posve slab potres u okolici Zagreba (Maksimir).

21. *prosinca* opaziše potres u *Zagrebu*, *Moravču* i *Dugom selu*.

2. **Bakarska potresna pukotina** stvorila je ove godine 21 potres, dakle preko polovice svih ovogodišnjih potresa. U toj pukotini imali su svoje izhodište ovi potresi:

11. *veljače* osjetiše u *Drazi* kod Sušaka tri potresa. Prvi potres, koji je bio u *Drazi* najjači, osjetiše na *Rieci*. u *Krasici* i *Bakru*. U *Krasici* je bio drugi potres jači od prvoga, pa se čini, da je pri tom potresno ognjište skočilo od SZ—JI. Drugi taj potres osjetiše još u *Bakru*. Potres, što ga oko 3 sata ubilježiše u *Novom* i *Kraljevici*, po svoj prilici odgovara trećemu potresu u *Drazi*, a drugomu u *Krasici*.

15. *veljače* osjetiše iznova ojak potres u *Drazi*, *Bakru* i *Kraljevici*.

17. *veljače* ubilježena su dva potresa. Prvi jači potres osjetiše nn *Sušaku*, u *Drazi*, *Bakru*, *Kraljevici*, *Kukuljanovu*, *Kostreni* sv. Lucije i kod *Sv. Ane* u Drazi. Drugi slabiji osjetiše jednu uru kasnije u *Bakru* i *Kraljevici*.

19. *veljače* imamo iznova u *Drazi* ubilježena četiri potresa, a od njih osjetiše tri potresa još i u *Bakru*.

15. *travnja* osjetiše u *Drazi* slab potres.

14. *svibnja* skočilo je potresno ognjište prema *Novom*, gdje se taj dan čula podzemna tutnjava.

Digitized by Google

16. *svibnja* osjetiše u *Novom* slab potres.

20. *lipnja* bio je u *Drazi* ojak potres, koji osjetiše i u *Bakru*.

4. *kolovoza* ubilježena su u *Drazi* dva slaba potresa.

8. *listopada* skočilo je potresno ognjište iznova prema JI, gdje su toga dana u *Ledenicah* osjetili slab potres.

30. *listopada* bila su u istom kraju tri potresa. Prvi potres osjetiše u *Lukovu*, *Senju* i *Ledenicah*, a druga dva samo u *Lukovu* i *Senju*.

2. *prosinca* ubilježen je potres u *Drazi* i *Crkvenici*, a bez sumnje bio je i u mjestih, koja leže izmedju Drage i Crkvenice, ali ga ne osjetiše, jer je bio o ponoći.

3. **Ivanečka potresna pukotina** stvorila je ove godine dva potresa, koji osjetiše 7. *lipnja*. Prvi i jači potres toga dana osjetiše u *Ivancu*, *Lepoglavi*, *Tužnom Cerju*, *Zajezdi* i *Klenovniku*, a drugi samo u *Ivancu*.

4. **Djakovačka potresna pukotina** bila je izhodištem potresa, koji osjetiše 31. ožujka u *Djakovu*.

11. *listopada* osjetiše nešto jači potres u jednom dielu Podravine, odkle je on zahvatio i u Ugarsku. Kod nas ubilježen je potres u *Virovitici*, *Gradini*, *Lukaču*, *Ferdinandovcu*, *Čagliću*, *Pakracu*, *Cabuni* i *Suhom polju*, a u Ugarskoj znamo da ga osjetiše u *Pečuhu* i *Barču*. Cieli ovaj kraj leži upravo izmedju dvie poznate potresne pukotine, naime izmedju *ivanečke* i *djakovačke*, a iz materijala, što nam je poznat, težko je točno ustanoviti, iz koje je od ovih dviju pukotina potres postao.

Digitized by Google

Dodatak raspravi „Ribe dubrovačke".

u „Radu" knj. 155.

od B. Kosića.

192. **Lepidopus caudatus**, Günth. *(L. Peronii*, Risso; *L. argentatus*, Nardo). Mač.

U Rijeci, gdje se bio nasukao na obalu pušeći manju ribu, uhvatiše primjerak ove vrste dne 13. srpnja ove god. (1904.) — Ribari ne poznaše ribu, te je prilika, da je ovaj eksemplar prvi, kome se konstatuje vrsta na našoj ribaonici. Riba u Dubrovniku nema imena, dok od gosp. nadučitelja Ružičića doznajemo, da je na Jelsi zovu „Mač", koje ime, jer je prikladno, gore donosimo.

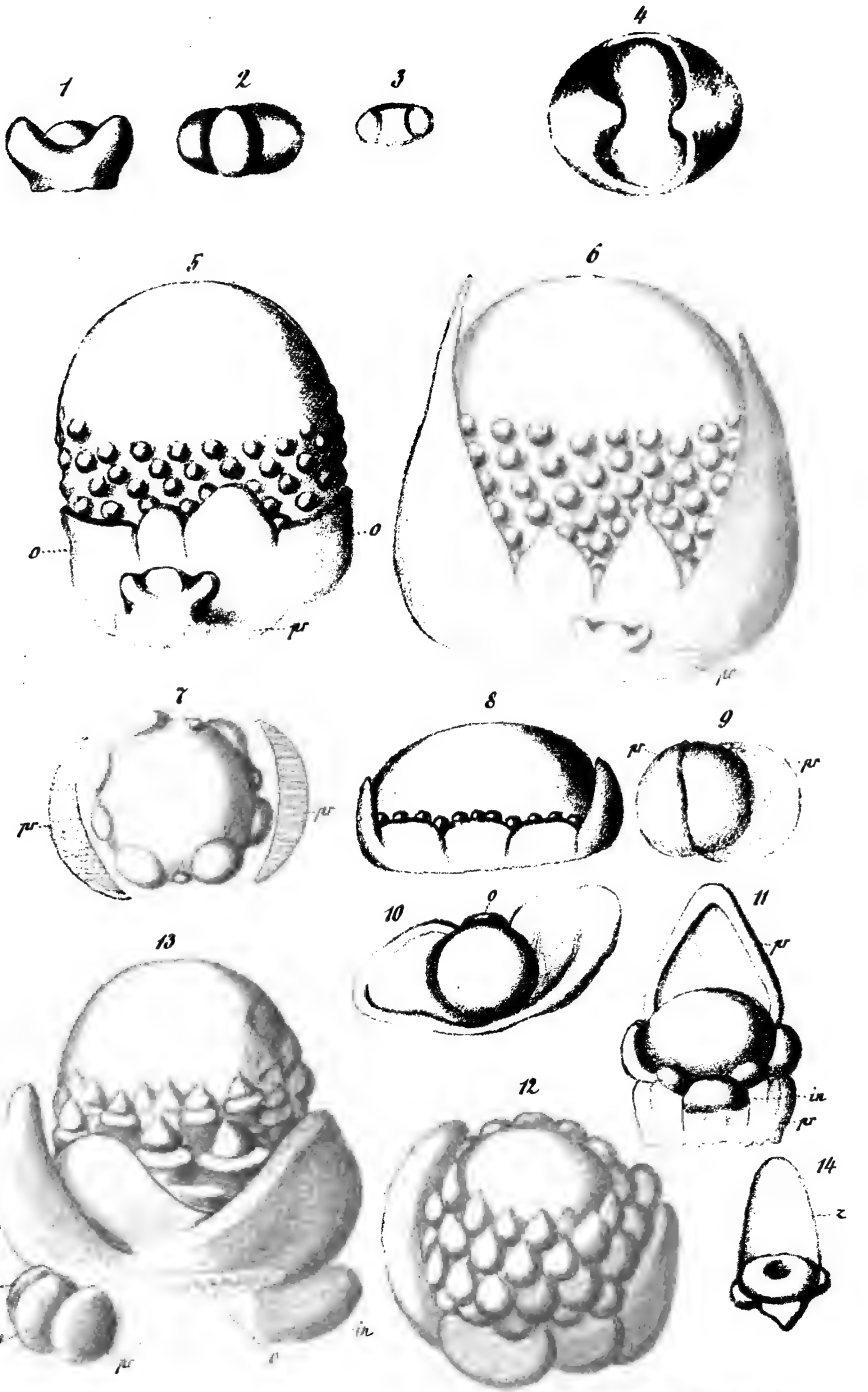
Evo mjera ovoga primjerka: čitava duljina tijela 705 *mm.*, širina po trbušnoj strani 42 *mm.*, duljina glave (od početka gornje čeljusti) 93 *mm.*, premjer oka 18 *mm.*, duljina najvišega zuba na početku gornje čeljusti — sprijeda — 6 *mm.*, najdulja bodljika dorsalne peraje — treća — 21 *mm.*

Errata:	*Corrige:*
Na strani 6. **(Carcharodon)** mješte: rečenoj vladi, a onda ribare i nagradi	ima biti: rečenoj vladi, a ona ribare i nagradi
Na strani 6. (nota) mješte: jer se drže dalje od kraja	ima biti: jer se možda drže dalje od kraja
Na strani 7. **(Scyllium)** mješte: od cavtatskih ribara, koji ribaju parangalom	ima biti: od cavtatskih ribara, ribajući parangalom
Na strani 17. (nota: svjećalo) mješte: vode jednu ribu u postu	ima biti: vode jedni ribu u postu
Na strani 21. **(Squalius)** mješte: vrsti *Squalius dentex*	ima biti: vrsti *Squalius cephalus*
Na strani 23. **(Scarus)** mješte: da se gdjekad reklo, da se *Scarus* ulovio u Jadranskome moru, ali da se svagda pokazalo, da je to druga riba	ima biti: da se gdjekad *Scarus* ulovio u Jadranskome moru, ali ipak da je vrsta pripadnik drugoga mora (grčkoga)

Digitized by Google

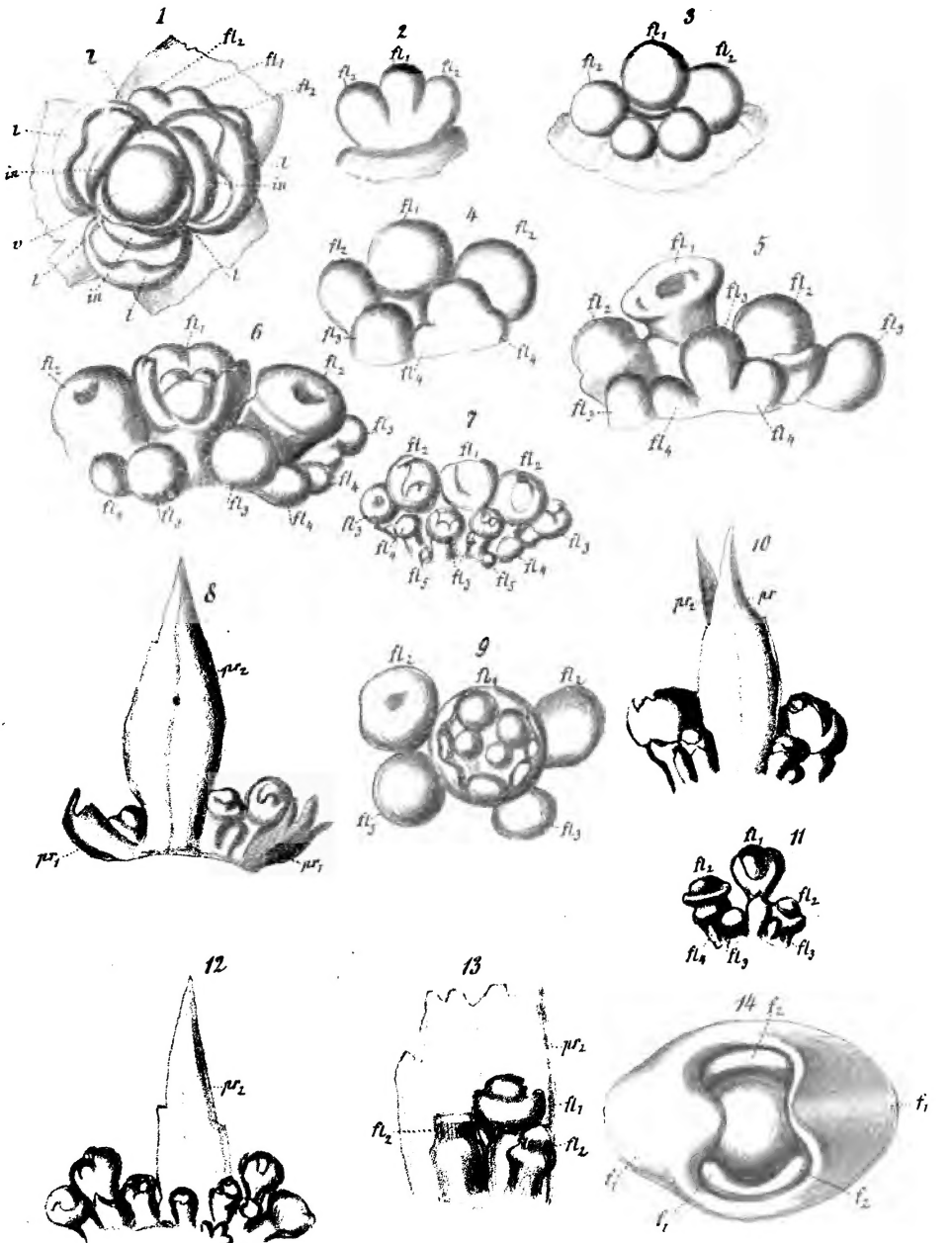
Errata:	*Corrige:*
Na trani 24. **(Scarus)** mješte: te se može slutiti, da se raskotio	ima biti: te se može slutiti, da bi se bio raskotio
Na strani 25. **(Heliastes)** mješte: u kalamotskome konalu kod otočića s. Andrije itd.	ima biti: u kalamotskome konalu, kod otočića s. Andrije itd.
Na strani 29. (nota: Frondžata) mješte: gdje vide da ima ribe, koja napokon ostaje unutra	ima biti: gdje vide da ima ribe, ostavši napokon unutra
Na strani 37. **(Corvina nigra)** mješte: koji lijepi primjerak; ali baš golemih vidjeh samo iz Arbanaskoga mora. Mrijesti se	ima biti: koji lijepi primjerak iz Rijeke itd. Mrijesti se

Digitized by Google



Digitized by Google

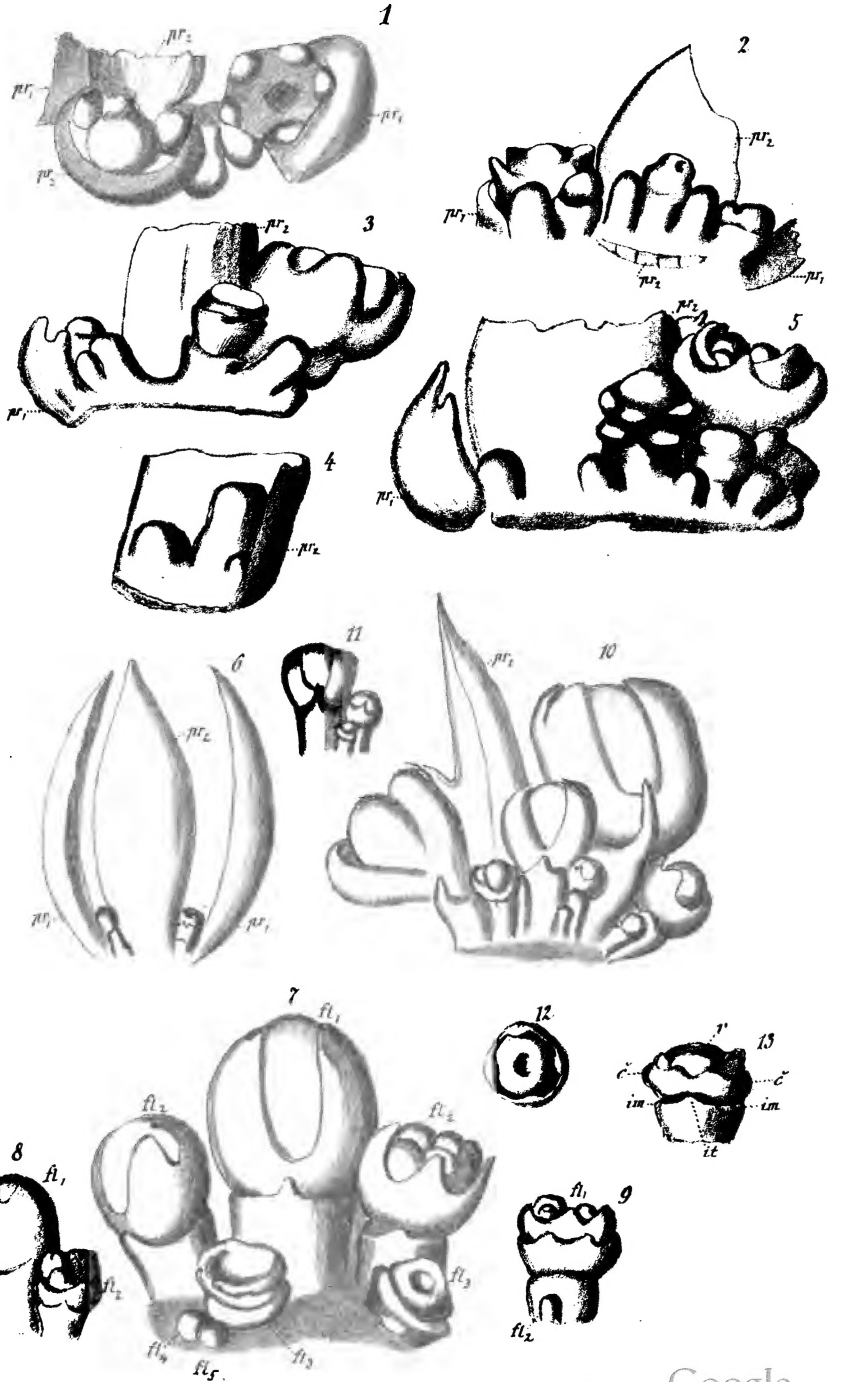
Digitized by Google



Digitized by Google

Lit. Bile Hajdović, Zagr.

Digitized by Google



Digitized by Google